

重力レンズ宇宙論
2024 年度立教大学集中講義

大栗 真宗

最終変更日：2024 年 5 月 23 日

間違い等あればお知らせください (masamune.oguri@chiba-u.jp)

目次

第 1 章	重力レンズ方程式の導出	7
1.1	幾何光学近似	7
1.2	測地線方程式	8
1.3	一様等方宇宙の測地線	10
1.4	ゆらぎを含んだ宇宙の測地線	12
1.5	重力レンズ方程式	14
1.6	さまざまな近似	15
1.7	Fermat の原理を用いた別の導出	20
第 2 章	重力レンズの一般的性質	23
2.1	重力レンズ方程式のまとめ	23
2.2	像の位置および複数像	24
2.3	像の変形	24
2.4	増光率と像のパリティ	27
2.5	臨界曲線および焦線	27
2.6	時間の遅れ	28
第 3 章	重力レンズ方程式とその解の具体的な例	33
3.1	球対称レンズの一般論	33
3.2	球対称レンズにおける複数像	36
3.3	球対称レンズの具体例	37
3.3.1	点質量レンズ	37
3.3.2	特異等温球	40
3.3.3	コア等温球	42
3.3.4	Navarro-Frenk-White (NFW) モデル	43
3.3.5	冪分布レンズ	44
3.4	非球対称レンズ	45
3.5	質量-薄板縮退	47

はじめに

この講義ノートは集中講義の内容の、特に重力レンズの基礎の部分を簡潔にまとめたものであり、朝倉書店より出版予定 (2025 年?) の重力レンズの教科書の草稿から抜粋、簡約して作成された。出版される教科書は、この講義ノートのそれぞれのトピックのより詳しい解説やより詳しい式変形、さらにこの講義ノートに含まれない他の多くの内容 (複数レンズ平面近似, 強い重力レンズ, 重力マイクロレンズ, 弱い重力レンズ, 波動光学重力レンズ, Schrödinger 方程式との対応, など) を含むので, 出版されたあかつきにはぜひそちらも参照していただければ幸いである。

第 1 章 重力レンズ方程式の導出

1.1 幾何光学近似

一般相対論において、電磁場はスカラーポテンシャルとベクトルポテンシャルを組み合わせた共変ベクトル、電磁 4 元ポテンシャル A^μ を用いて記述される。 A^μ を用いて、ある背景時空中の電磁場テンソルは

$$F^{\mu\nu} := A^{\nu;\mu} - A^{\mu;\nu} \quad (1.1.1)$$

と定義され、真空中の電磁場の運動方程式は $F^{\mu\nu}$ を用いて

$$F^{\mu\nu}{}_{;\mu} = 0 \quad (1.1.2)$$

と書き表される。電磁 4 元ポテンシャル A^μ はゲージ自由度があり、ここでは Lorenz ゲージ

$$A^\mu{}_{;\mu} = 0 \quad (1.1.3)$$

を採用することにする。

式 (1.1.2) を A^μ についての式に書き換えるため、式 (1.1.1) を代入すると

$$F^{\mu\nu}{}_{;\mu} = A^{\nu;\mu}{}_{;\mu} - A^{\mu;\nu}{}_{;\mu} \quad (1.1.4)$$

となる。右辺第 2 項について、共変微分の定義と式 (1.1.3) のゲージ条件から、背景時空の Ricci テンソルを用いて

$$A^{\mu;\nu}{}_{;\mu} = A^\mu{}_{;\mu}{}^{;\nu} + R_\mu{}^\nu A^\mu = R_\mu{}^\nu A^\mu \quad (1.1.5)$$

となるので、式 (1.1.4) は

$$A^{\nu;\mu}{}_{;\mu} - R_\mu{}^\nu A^\mu = 0 \quad (1.1.6)$$

と書き表せる。

式 (1.1.6) の左辺第 1 項は、電磁波の波長を λ とすると、 $\mathcal{O}(A/\lambda^2)$ のオーダーである。一方で、左辺第 2 項は、曲率半径を L_R と置くと $\mathcal{O}(A/L_R^2)$ のオーダーである。考えている電磁波の波長は天文学的な長さスケールに比べるときわめて短い、すなわち $\lambda \ll L_R$ のため、宇宙論的な距離の電磁波の伝搬を考える上では、左辺第 2 項は無視することができて、式 (1.1.6) は

$$A^{\nu;\mu}{}_{;\mu} = 0 \quad (1.1.7)$$

と簡略化される。

第1章 重力レンズ方程式の導出

さらに計算を進めるために、 A^μ の振幅が位相に比べてゆっくり変動するとするアイコナール近似を採用し、 A^μ を無次元の微小パラメータ ϵ を用いて

$$A^\nu = (B^\nu + \epsilon C^\nu + \dots) e^{iS/\epsilon} \quad (1.1.8)$$

と展開する。式 (1.1.7) に代入すると、 ϵ^{-2} に比例する項は

$$-S_{;\mu} S_{;\mu} B^\nu e^{iS/\epsilon} = 0 \quad (1.1.9)$$

となる。ここで、位相 S はスカラーなので共変微分が偏微分となることを用いている。位相の微分 $S_{;\mu}$ は、位相一定から決まる波面に垂直なベクトルなので、波数ベクトルと解釈できることから

$$k_\mu := S_{;\mu} \quad (1.1.10)$$

とおくと、式 (1.1.9) は最終的に

$$k^\mu k_\mu = 0 \quad (1.1.11)$$

と書き表せる。この式はアイコナール方程式と呼ばれる。式 (1.1.11) を共変微分し、さらに Christoffel 記号の下付き添字の対称性から得られる $k_{\mu;\nu} = k_{\nu;\mu}$ を用いると

$$(k^\mu k_\mu)_{;\nu} = 2k^\mu k_{\mu;\nu} = 2k^\mu k_{\nu;\mu} = 0 \quad (1.1.12)$$

が得られ、 k^μ が測地線方程式に従うことが示される。すなわち、電磁波が幾何光学近似のもとでヌル測地線に沿って伝搬することが示されたことになる。

1.2 測地線方程式

一般相対論では、時空内の光の軌跡は測地線方程式に従って決められる。測地線方程式を理解するために、まずは曲がった時空における平行移動を思い出そう。

一般相対論においては、光子を含めたさまざまな粒子の運動は、時空の曲線で表現される。ある基底を定めると、時空内の各点、すなわち世界点は、 x^μ で表される。ここで、 $\mu = 0, 1, 2, 3$ であり、 $\mu = 0$ の第ゼロ成分が時間、その他の成分が空間を表す。時空の曲線は、曲線に沿って滑らかに増加するパラメータ λ を用いて、 $x^\mu(\lambda)$ と表すことができるだろう。そうすると、この曲線の接ベクトルは

$$V^\mu := \frac{dx^\mu}{d\lambda} \quad (1.2.1)$$

と書くことができる。曲がった時空におけるベクトル X^μ の、この曲線に沿った平行移動とは

$$X^\mu_{;\alpha} V^\alpha = 0 \quad (1.2.2)$$

を満たすような移動であった。上付き添字と下付き添字で同じ記号が使われている場合にその添字について常に和をとる Einstein の縮約記法を、混同の恐れがない範囲で断りなく用いていく。セミ

1.2 測地線方程式

コロンは共変微分を表し，Christoffel 記号を用いて具体的に書き下すと

$$(X^\mu{}_{;\alpha} + \Gamma^\mu{}_{\alpha\beta} X^\beta) V^\alpha = 0 \quad (1.2.3)$$

である．コンマは偏微分を表す．

測地線は，接ベクトルを接ベクトルの方向に平行移動させることで定義される曲線，すなわち

$$V^\mu{}_{;\alpha} V^\alpha = 0 \quad (1.2.4)$$

で定義される．式 (1.2.4) は曲がった時空における「直線」を定義する式とも言える．再び，Christoffel 記号を用いて具体的に書き下すと

$$(V^\mu{}_{;\alpha} + \Gamma^\mu{}_{\alpha\beta} V^\beta) V^\alpha = 0 \quad (1.2.5)$$

となる．接ベクトルの定義式 (1.2.1) を代入すると

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\lambda^2} + \Gamma^\mu{}_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \frac{dx^\beta}{d\lambda} = 0 \quad (1.2.6)$$

を得る．式 (1.2.6) が測地線方程式であり，ほとんどの重力レンズ解析において仮定される，幾何光学近似のもとでの出発点となる式である．曲線上の位置を指定し，測地線に沿って運動する粒子の軌跡が測地線方程式 (1.2.6) を満たすようなパラメータ λ はアフィンパラメータと呼ばれる．質量ゼロの粒子に対しては，線素がヌル，すなわち

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = 0 \quad (1.2.7)$$

となるため，アフィンパラメータとしてしばしば採用されるのが， $dx^\mu/d\lambda$ が 4 元波数ベクトル k^μ となる，すなわち

$$\frac{dx^\mu}{d\lambda} = k^\mu \quad (1.2.8)$$

となるように定義されたアフィンパラメータである． k^μ の第ゼロ成分は角周波数 ω/c ，空間成分は 3 次元波数ベクトル \mathbf{k} に対応する．式 (1.2.7) から， k^μ もヌル条件

$$k^\mu k_\mu = g_{\mu\nu} k^\mu k^\nu = 0 \quad (1.2.9)$$

を満たすことがわかる． k^μ を用いて測地線方程式 (1.2.6) を書き換えると

$$\frac{dk^\mu}{d\lambda} + \Gamma^\mu{}_{\alpha\beta} k^\alpha k^\beta = 0 \quad (1.2.10)$$

となる．式 (1.2.9) を λ で微分し，測地線方程式 (1.2.10) が成り立っていることを確認するのも容易だろう．

以下では，測地線方程式 (1.2.6) をさらに扱いやすい表式に変形していく．式 (1.2.1) で定義される接ベクトルを用いた測地線方程式の表式 (1.2.4) から

$$(g_{\mu\nu} V^\nu)_{;\beta} V^\beta = g_{\mu\nu} V^\nu{}_{;\beta} V^\beta = 0 \quad (1.2.11)$$

となることが示せるので、この式を具体的に書き下し、和をとる添字について適当にギリシャ文字の入れ替えを行うと

$$\frac{dx^\beta}{d\lambda} \frac{\partial}{\partial x^\beta} \left(g_{\mu\nu} \frac{dx^\nu}{d\lambda} \right) - \Gamma^\nu_{\mu\beta} g_{\nu\alpha} \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \frac{dx^\beta}{d\lambda} = 0 \quad (1.2.12)$$

となる。この式を計算すると、最終的に以下の測地線方程式の等価な表式

$$\frac{d}{d\lambda} \left(g_{\mu\nu} \frac{dx^\nu}{d\lambda} \right) - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta,\mu} \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \frac{dx^\beta}{d\lambda} = 0 \quad (1.2.13)$$

が得られる。式(1.2.8)で決まる4元波数ベクトル k^μ を用いた同様の等価な表式は、 $k_\mu = g_{\mu\nu} k^\nu$ に対して

$$\frac{dk_\mu}{d\lambda} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta,\mu} k^\alpha k^\beta = 0 \quad (1.2.14)$$

となる。これらの測地線方程式の表式は、例えば計量テンソルがある座標 x^μ に陽によらない場合に $g_{\mu\nu} dx^\nu/d\lambda$ が測地線に沿って保存することが直ちにわかる、などの点で便利な表式である。

1.3 一様等方宇宙の測地線

ここで、練習問題として、一様等方宇宙の測地線を考えよう。一様等方宇宙の計量テンソルは、以下の Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW) 計量

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + a^2 [d\chi^2 + f_K^2(\chi) (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)] \quad (1.3.1)$$

で表される。 $a = a(t)$ はスケール因子、 $f_K(\chi)$ は3次元空間曲率 K の値に依存した

$$f_K(\chi) := \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{K}} \sin(\sqrt{K}\chi) & (K > 0) \\ \chi & (K = 0) \\ \frac{1}{\sqrt{-K}} \sinh(\sqrt{-K}\chi) & (K < 0) \end{cases} \quad (1.3.2)$$

で定義される関数である。引数をもつ関数、例えば $f_K(\chi)$ を、混同の恐れがない範囲で引数のない f_K のように略記することもあるので注意してほしい。

この計量テンソルのもとで得られる測地線方程式の解を考える。ある測地線を考えたとき、一様等方時空なので一般性を失うことなくその測地線が空間座標の原点を通るとしてよい。測地線方程式(1.2.13)から、まず $x^3 = \phi$ について、計量テンソルが ϕ によらないことから

$$\frac{d}{d\lambda} \left(g_{3\nu} \frac{dx^\nu}{d\lambda} \right) = \frac{1}{2} g_{\alpha\beta,3} \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \frac{dx^\beta}{d\lambda} = 0 \quad (1.3.3)$$

となり、この表式を両辺積分することで、ある定数 C を用いて

$$g_{3\nu} \frac{dx^\nu}{d\lambda} = a^2 f_K^2 \sin^2 \theta \frac{d\phi}{d\lambda} = C \quad (1.3.4)$$

1.3 一様等方宇宙の測地線

となる。境界条件として原点で $\chi = 0$ なので $f_K(\chi) = 0$ となることから $C = 0$ が得られるので、結局

$$\frac{d\phi}{d\lambda} = 0 \quad (1.3.5)$$

が示される。次に $x^2 = \theta$ について、同様に測地線方程式 (1.2.13) から

$$\frac{d}{d\lambda} \left(g_{2\nu} \frac{dx^\nu}{d\lambda} \right) = 0 \quad (1.3.6)$$

となり、 ϕ の場合と同様の議論によって

$$\frac{d\theta}{d\lambda} = 0 \quad (1.3.7)$$

が示される。次に動径方向 $x^1 = \chi$ について、測地線方程式 (1.2.13) から

$$\frac{d}{d\lambda} \left(g_{1\nu} \frac{dx^\nu}{d\lambda} \right) = 0 \quad (1.3.8)$$

となる。ただし

$$f'_K := \frac{df_K}{d\chi} \quad (1.3.9)$$

である。この表式を両辺積分することで、ある定数 C を用いて

$$a^2 \frac{d\chi}{d\lambda} = C \quad (1.3.10)$$

が得られる。アフィン変換によって一般性を失うことなく $C = 1$ ととることができるので、そのようなアフィンパラメータをとったとすると、最終的に

$$\frac{d\chi}{d\lambda} = \frac{1}{a^2} \quad (1.3.11)$$

が得られる。

最後に、時間方向 $x^0 = ct$ についても、測地線方程式 (1.2.13) からその関係式を得ることもできるが、線素から求める方が簡単である。具体的に、ヌル測地線を考えるとすると、ヌル条件 $ds^2 = 0$ より

$$g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} = 0 \quad (1.3.12)$$

が得られ、この式にこれまでの結果を代入すると

$$- \left(\frac{c dt}{d\lambda} \right)^2 + \frac{1}{a^2} = 0 \quad (1.3.13)$$

となるので、結局

$$\frac{c dt}{d\lambda} = \pm \frac{1}{a} \quad (1.3.14)$$

が得られる。質量をもった粒子の場合も同様の方法で $c dt/d\lambda$ を容易に求めることができる。正負の符号は、原点からある方向に伸びた測地線について、原点から遠ざかる解と原点に向かってくる解が両方とも測地線方程式の解になっていることに起因する。

第1章 重力レンズ方程式の導出

まとめると、一様等方宇宙における原点を通るヌル測地線は式 (1.3.5), (1.3.7), (1.3.11), (1.3.14) で表される。この測地線は、ある時刻で角度座標 (θ, ϕ) にある光が、角度座標での位置を保ったまま (すなわち $\theta = \text{一定}$, $\phi = \text{一定}$) χ が時間とともに増えていく (あるいは減っていく) という、光が「真っ直ぐ」進むという直感に従った解となっている。

また、式 (1.3.11) と (1.3.14) から、宇宙論的距離の計算に必要な一様等方宇宙の基本関係式

$$d\chi = \pm \frac{c dt}{a} \quad (1.3.15)$$

を得ることができる。具体例として、空間座標の原点を私たち観測者に設定した場合、 χ は観測者からの共動動径距離の意味を持ち、宇宙年齢 t で発せられた光を観測者が観測した場合のその光源までの共動動径距離 $\chi(t)$ を

$$\chi(t) = \int_t^{t_0} \frac{c dt'}{a(t')} \quad (1.3.16)$$

と求めることができる。 t_0 は現在の宇宙年齢である。この式をさらに変形することで、Hubble パラメータ H を用いた共動動径距離の、スケール因子 a の関数としての表式

$$\chi(a) = \int_a^1 da' \frac{c}{a'^2 H(a')} \quad (1.3.17)$$

あるいは、赤方偏移 $z = 1/a - 1$ の関数としての表式

$$\chi(z) = \int_0^z dz' \frac{c}{H(z')} \quad (1.3.18)$$

が得られる。

1.4 ゆらぎを含んだ宇宙の測地線

測地線方程式 (1.2.6) から光の経路の曲がり方を計算するためには、非一様宇宙における計量テンソルを具体的に指定する必要がある。ここでは、式 (1.3.1) の FLRW 計量にゆらぎの成分を加えた

$$ds^2 = - \left(1 + \frac{2\Phi}{c^2}\right) c^2 dt^2 + a^2 \left(1 - \frac{2\Psi}{c^2}\right) \gamma_{ij} dx^i dx^j \quad (1.4.1)$$

および

$$\gamma_{ij} dx^i dx^j := d\chi^2 + f_K^2(\chi) (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (1.4.2)$$

で与えられる計量テンソルを考える。 Φ と Ψ はそれぞれ重力ポテンシャルおよび曲率ゆらぎと呼ばれ、場所と時間の関数である。

以下では、 Φ と Ψ は十分小さい、すなわち $|\Phi/c^2| \ll 1$, $|\Psi/c^2| \ll 1$ の仮定を常におく。例え「強い」重力レンズであってもこの近似はほとんどの場合に良い精度で成り立っており、現在観測されているほぼ全ての重力レンズ現象において適用できる仮定であることを強調しておく。例外は、例えばブラックホール近傍の直接観測であり、ここではそのようなブラックホールの事象の地平線付近などの強重力場における光の経路の曲がり方は取り扱わないことにする。

1.4 ゆらぎを含んだ宇宙の測地線

ちなみに、重力レンズの計算で主に興味がある範囲で、重力ポテンシャルと曲率ゆらぎに対して

$$\Phi = \Psi \quad (1.4.3)$$

の単純な関係が成り立つ。しかし、ここでは重力レンズ方程式の導出の途中までは Φ と Ψ を別々に扱い、これらが重力レンズの計算にどのような寄与をするかを見る。一般相対論を修正した理論、修正重力理論では一般に $\Phi \neq \Psi$ となるため、重力レンズと他の観測量を組み合わせて、 $\Phi = \Psi$ がどこまで精密に成り立っているかを調べることで、一般相対論を検証する研究も盛んに行われている。

式 (1.4.1) の計量テンソルを仮定し、測地線方程式の等価な表式 (1.2.13) を具体的に計算することによって、重力レンズ方程式を導出しよう。この計量テンソルの空間部分は、式 (1.4.2) からわかるように、動径座標が $x^1 = \chi$ 、角度座標が $x^2 = \theta$ と $x^3 = \phi$ で指定される、極座標で表示されている。また、式 (1.4.1) において、計量テンソルの空間部分においてスケール因子が分離されているので、 $\gamma_{ij} dx^i dx^j$ で指定される空間座標は共動座標であることを注意しておく。

宇宙の一様等方性から、この空間座標の原点は原理的にはどこに置いてもよいが、重力レンズの計算においては、原点を私たち観測者に設定するのが明らかに自然である。この場合、 χ は観測者からの共動動径距離の意味を持つ。一方、 θ と ϕ は天球面での位置を指定する天球座標の意味を持ち、重力レンズの計算において重要な役割を果たす。以下、さらなる記法の簡略化のため、天球座標の計量テンソルを ω_{ab} とし、式 (1.4.2) を

$$\gamma_{ij} dx^i dx^j = d\chi^2 + f_K^2(\chi) \omega_{ab} dx^a dx^b \quad (1.4.4)$$

および

$$\omega_{ab} dx^a dx^b := d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2 \quad (1.4.5)$$

のように書き表すこととする。添字についてまとめておくと、一般に μ, ν, α, β などのギリシャ文字は時空座標 0 から 3、 i, j, k, \dots は空間座標 1 から 3、 a, b, c, \dots は天球座標 2 から 3 を走ることとする。

先に求めた一様等方宇宙のヌル測地線方程式の解、および重力ポテンシャルが小さいという仮定から、 Φ/c^2 や Ψ/c^2 の 1 次までを考える近似のもとに、測地線方程式を計算していく。

測地線方程式 (1.2.13) の天球座標成分 $\mu = b$ を具体的に計算しよう。まず、左辺第 1 項について

$$\frac{d}{d\lambda} \left(g_{b\nu} \frac{dx^\nu}{d\lambda} \right) = \frac{d}{d\lambda} \left[a^2 \left(1 - \frac{2\Psi}{c^2} \right) f_K^2 \omega_{bc} \frac{dx^c}{d\lambda} \right] \simeq \frac{\omega_{bc}}{a^2} \frac{d}{d\lambda} \left(f_K^2 \frac{dx^c}{d\lambda} \right) \quad (1.4.6)$$

と計算できる。左辺第 2 項についても

$$\frac{1}{2} g_{\mu\nu, b} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} \simeq \frac{1}{2} g_{00, b} \left(\frac{c dt}{d\lambda} \right)^2 + \frac{1}{2} g_{11, b} \left(\frac{d\chi}{d\lambda} \right)^2 \simeq -\frac{\Phi_{,b}}{a^2 c^2} - \frac{\Psi_{,b}}{a^2 c^2} \quad (1.4.7)$$

と計算できるので、最終的に測地線方程式 (1.2.13) を

$$\omega_{bc} \frac{d}{d\lambda} \left[f_K^2(\chi) \frac{dx^c}{d\lambda} \right] + \frac{1}{c^2} (\Phi_{,b} + \Psi_{,b}) = 0 \quad (1.4.8)$$

と計算することができた。さらに ω^{ab} を両辺に掛けて

$$\frac{d}{d\chi} \left[f_K^2(\chi) \frac{dx^a}{d\chi} \right] + \frac{1}{c^2} \omega^{ab} (\Phi_{,b} + \Psi_{,b}) = 0 \quad (1.4.9)$$

という式が得られた。この式は、一様等方宇宙における、重力レンズ効果による光 (ないし質量ゼロの粒子) の経路の曲がりを表す重要な式である。

式 (1.4.9) の左辺の第2項が、重力場による光の曲がりを表す。この項の表式から、重力レンズ効果は、 $\Phi + \Psi$ 、すなわち重力ポテンシャルと曲率ゆらぎの和で決まることがわかる。一方、重力レンズ計算で興味がある範囲で、式 (1.4.3) が成り立つことから、 $\Phi + \Psi = 2\Phi$ となる。この前係数の2こそが、Newton 力学と一般相対論での曲がり角の2倍の違いに対応しているのである。一般相対論以外の修正重力理論を考えると、一般に $\Phi \neq \Psi$ なので、 $\Phi + \Psi \neq 2\Phi$ となり、重力レンズ効果の大きさが変化する。この事実を用いた一般相対論の検証はこれまで数多く行われてきているが [1]、今のところ一般相対論からの有意なずれは発見されていない。以下では、式 (1.4.9) に $\Phi = \Psi$ を代入した表式

$$\frac{d}{d\chi} \left[f_K^2(\chi) \frac{dx^a}{d\chi} \right] + \frac{2}{c^2} \omega^{ab} \Phi_{,b} = 0 \quad (1.4.10)$$

を用いて、重力レンズ方程式を導出していく [2]。

1.5 重力レンズ方程式

まず、式 (1.4.10) を、 χ について0から χ' まで積分することで

$$f_K^2(\chi') \frac{dx^a}{d\chi'} = -\frac{2}{c^2} \int_0^{\chi'} d\chi \omega^{ab} \Phi_{,b}(\chi, \boldsymbol{\theta}(\chi)) \quad (1.5.1)$$

が得られ、さらに両辺を $f_K^2(\chi')$ で割って、 χ' について0から χ_s まで積分すると

$$x^a(\chi_s) - x^a(0) = -\frac{2}{c^2} \int_0^{\chi_s} d\chi' \frac{1}{f_K^2(\chi')} \int_0^{\chi'} d\chi \omega^{ab} \Phi_{,b}(\chi, \boldsymbol{\theta}(\chi)) \quad (1.5.2)$$

となる。ここで $\boldsymbol{\theta} = (\theta, \phi)$ であり、光の伝播に伴って、重力レンズ効果による光の経路の曲がりによって、天球座標での位置が変わっていくため、重力ポテンシャル Φ の引数において $\boldsymbol{\theta}(\chi)$ と表記している。積分の順番を入れ替えることで

$$x^a(\chi_s) - x^a(0) = -\frac{2}{c^2} \int_0^{\chi_s} d\chi \omega^{ab} \Phi_{,b}(\chi, \boldsymbol{\theta}(\chi)) \int_{\chi}^{\chi_s} d\chi' \frac{1}{f_K^2(\chi')} \quad (1.5.3)$$

と書き換えることができる。右辺の2番目の積分について

$$\int_{\chi}^{\chi_s} d\chi' \frac{1}{f_K^2(\chi')} = \frac{f_K(\chi_s - \chi)}{f_K(\chi) f_K(\chi_s)} \quad (1.5.4)$$

と計算できるので、式 (1.4.10) は2回積分を実行することで、最終的に

$$x^a(\chi_s) - x^a(0) = -\frac{2}{c^2} \int_0^{\chi_s} d\chi \frac{f_K(\chi_s - \chi)}{f_K(\chi) f_K(\chi_s)} \omega^{ab} \Phi_{,b}(\chi, \boldsymbol{\theta}(\chi)) \quad (1.5.5)$$

1.6 さまざまな近似

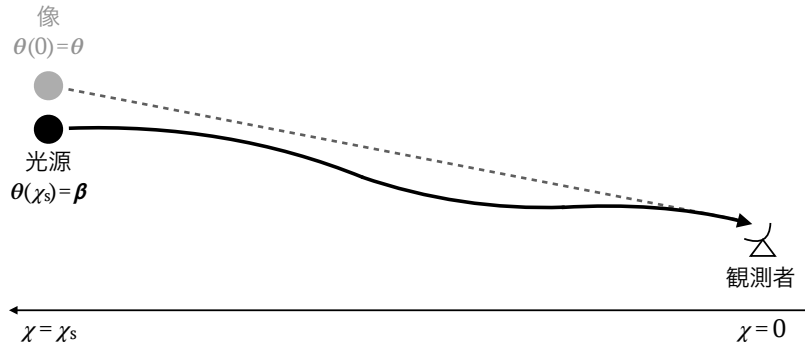


図 1.1 天体の元々の天球座標の位置 $\theta(\chi_s)$ と、観測される天球座標の位置 $\theta(0)$ との関係の模式図.

となることがわかる. この式を天球面上のベクトル表記ですべて書き換えると, $(\nabla_{\theta}\Phi)^a = \omega^{ab}\Phi_{,b}$ を用い, かつ $\theta(0)$ を移項して

$$\theta(\chi_s) = \theta(0) - \frac{2}{c^2} \int_0^{\chi_s} d\chi \frac{f_K(\chi_s - \chi)}{f_K(\chi)f_K(\chi_s)} \nabla_{\theta}\Phi(\chi, \theta(\chi)) \quad (1.5.6)$$

が得られる. 式 (1.5.6) が, いわゆる重力レンズ方程式の 1 つの表式である. 図 1.1 で示されているように, 共動動径距離 χ_s および天球座標 $\theta(\chi_s)$ にある天体からの光が, 重力レンズ効果によって光の経路が曲がり, 観測者は天球座標 $\theta(0)$ の位置で, この天体からの光が観測されることになる. 重力レンズ方程式は, このような状況において $\theta(\chi_s)$ と $\theta(0)$ の関係を決める方程式である.

式 (1.5.6) において, 重力ポテンシャルの微分は $\theta(\chi)$ で評価される必要があるが, 一方で $\theta(\chi)$ は重力レンズ方程式を解いて初めてわかる. したがって, 式 (1.5.6) はいわば積分方程式であり, そのままでは扱いにくい.

1.6 さまざまな近似

弱い重力場 $|\Phi/c^2| \ll 1$ の状況では, 重力レンズによる天球面上の位置の変化, すなわち $\theta(\chi_s)$ と $\theta(0)$ との角度の差は小さい. このことは, 重力レンズ効果の計算において, 天球座標の球面の効果を考える必要があまりなく, 局所平面座標を用いてよい, ということを意味する. 局所平面座標は, 図 1.2 で示されるとおり, 天球面上のある点 (θ, ϕ) を原点として, その点の周りで θ_1 および θ_2 でラベルされる 2 次元のデカルト座標系である. $\theta_1\theta_2$ 平面の原点のごく近傍の小さい角度スケールを考える限りにおいて, 球面の天球座標と局所平面座標の違いは無視できる. 局所平面座標は, 式 (1.4.5) で定義される天球座標の計量テンソルを

$$\omega_{ab}dx^a dx^b = \tilde{\omega}_{ab}d\tilde{x}^a d\tilde{x}^b := d\theta_1^2 + d\theta_2^2 \quad (1.6.1)$$

と座標変換することに対応している. 局所平面座標では計量テンソルが Kronecker のデルタ, すなわち $\tilde{\omega}_{ab} = \delta_{ab}$ となるため, 上付き添字と下付き添字の違いは重要でなくなる. 参考までに, θ_1, θ_2 軸の向きの取り方は回転の自由度があり, 考える問題に応じて自由に設定すればよい.

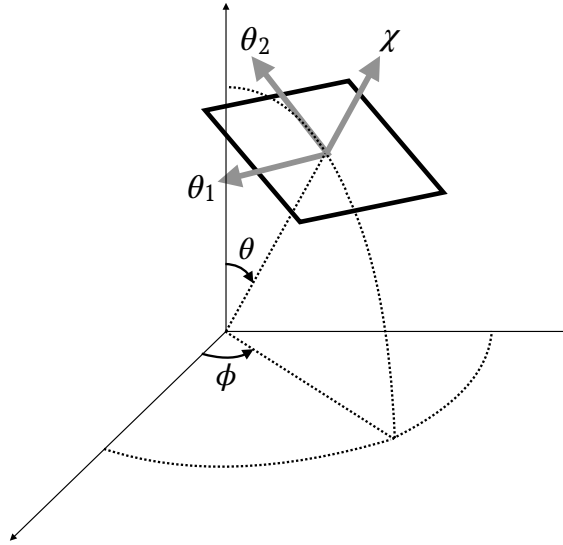


図 1.2 天球面上の局所平面座標 (θ_1, θ_2) .

さらに、重力レンズの計算においてしばしば採用される近似として、Born 近似がある。Born 近似は、元々は量子力学の散乱問題で使われる近似 [3] だが、重力レンズにおいては、例えば式 (1.5.1) など重力ポテンシャル微分を経路に沿って積分する際に、光の経路の曲がりを考慮せず直線に沿って積分を行う近似である。

注意点として、重力レンズにおける Born 近似は、さまざまな文脈でさまざまな形で使われる点である。例えば、ある恒星や銀河などの天体が単独で重力レンズ効果を起こす状況においては、Born 近似は、その曲がり角を、重力ポテンシャルの微分を直線上で積分して評価する近似である。より大胆な Born 近似として、式 (1.5.6) で与えられる重力レンズ方程式において、重力ポテンシャルの引数 $\theta(\chi)$ を $\theta(0)$ とする、すなわち式 (1.5.6) を

$$\theta(\chi_s) = \theta(0) - \frac{2}{c^2} \int_0^{\chi_s} d\chi \frac{f_K(\chi_s - \chi)}{f_K(\chi)f_K(\chi_s)} \nabla_{\theta} \Phi(\chi, \theta(0)) \quad (1.6.2)$$

と置き換える近似もしばしば採用される。この Born 近似は、重力ポテンシャルの微分を図 1.1 の実線でなく破線に沿って積分する近似に対応している。あるいは、式 (1.5.6) で与えられる積分方程式の逐次近似の最低次ということもできる。

式 (1.6.2) は、観測者が観測する天体の位置 $\theta(0)$ から天球座標上での元々の天体の位置 $\theta(\chi_s)$ への写像と見することもできる。慣習に従い、混同の恐れがない範囲で断りなく、 β を、光源と呼ばれる、元々の天体の天球座標の位置、すなわち仮に重力レンズ効果による光の経路の曲がりをゼロとした時に天球面上で観測されるはずの天体の位置、を表す記号とし、 θ を、像と呼ばれる、重力レンズ効果による光の経路の曲がりの結果、実際に観測される天体の天球座標の位置を表す記号とする (図 1.1)。式 (1.6.2) においては

$$\beta = \theta(\chi_s) \quad (1.6.3)$$

$$\theta = \theta(0) \quad (1.6.4)$$

1.6 さまざまな近似

であり, これらの記法を用いて式 (1.6.2) を

$$\beta = \theta - \frac{2}{c^2} \int_0^{\chi_s} d\chi \frac{f_K(\chi_s - \chi)}{f_K(\chi)f_K(\chi_s)} \nabla_{\theta} \Phi(\chi, \theta) \quad (1.6.5)$$

と書き表すことができる. 局所平面近似を採用するものとする, β は (β_1, β_2) を成分とする 2次元のデカルト座標系であり, θ は (θ_1, θ_2) を成分とする 2次元のデカルト座標系である. また $\nabla_{\theta} = (\partial/\partial\theta_1, \partial/\partial\theta_2)$ である. β が存在する平面は光源平面, θ が存在する平面は像平面と呼ばれる. 重力レンズ方程式は, 像平面から光源平面への写像を表す方程式と言える.

Born 近似のもとでの重力レンズ方程式 (1.6.5) は, さらに

$$\beta = \theta - \nabla_{\theta} \psi \quad (1.6.6)$$

と簡潔に書くことができる. $\psi = \psi(\theta)$ は

$$\psi(\theta) := \frac{2}{c^2} \int_0^{\chi_s} d\chi \frac{f_K(\chi_s - \chi)}{f_K(\chi)f_K(\chi_s)} \Phi(\chi, \theta) \quad (1.6.7)$$

で定義される重力レンズポテンシャルである. また, 曲がり角を重力レンズポテンシャルの勾配, つまり

$$\alpha(\theta) := \nabla_{\theta} \psi = \frac{2}{c^2} \int_0^{\chi_s} d\chi \frac{f_K(\chi_s - \chi)}{f_K(\chi)f_K(\chi_s)} \nabla_{\theta} \Phi(\chi, \theta) \quad (1.6.8)$$

と定義することで, 重力レンズ方程式 (1.6.6) を

$$\beta = \theta - \alpha(\theta) \quad (1.6.9)$$

という形で書くことも一般的である. この形に書くことで, 重力レンズ方程式が像平面の観測される像の位置 θ から天球面上の光源の位置 β への写像を表すことがより明瞭になる.

式 (1.6.8) で定義される重力レンズの曲がり角の表式などから, 重力レンズ効果は基本的に視線方向の重力ポテンシャルないし密度ゆらぎを視線方向に積分した量で決まることがわかる. しかしながら, 観測される強い重力レンズでは, 多くの場合は主に単独の銀河や銀河団によって引き起こされている. 重力レンズ効果を引き起こす銀河や銀河団などのレンズ天体の大きさは, 重力レンズ効果を受ける光源までの距離に比べて通常はずっと小さいため, それらレンズ天体は「薄い」, つまり視線方向のそれらレンズ天体の大きさが無視できるとする, 薄レンズ近似がほとんどの重力レンズ解析において採用される.

薄レンズ近似を数学的に以下のとおりに表現する. レンズ天体は赤方偏移 $z_1 = 1/a_1 - 1$ にあるとし, レンズ天体の近傍で物理距離の 3次元デカルト座標 $\mathbf{X} = (\mathbf{X}_{\perp}, Z)$ を考える. Z 軸方向は視線方向 χ の方向にとり, Z と垂直な 2次元平面は局所平面座標 θ を用いて

$$\mathbf{X}_{\perp} := a_1 f_K(\chi_1) \theta \quad (1.6.10)$$

で定義されるものとする. $\chi_1 := \chi(z_1)$ は赤方偏移 z_1 に対応した共動動径座標である. また $Z = 0$ は $\chi = \chi_1$ にとるものとする. この座標系を用いて, 薄レンズ近似は, レンズ天体の 3次元質量密度分布を

$$\rho(\mathbf{X}) \simeq \delta^D(Z) \Sigma(\mathbf{X}_{\perp}) \quad (1.6.11)$$

第1章 重力レンズ方程式の導出

とする近似として定義できる． $\delta^D(x)$ は Dirac のデルタ関数であり，レンズ天体の質量面密度分布 $\Sigma(\mathbf{X}_\perp)$ はレンズ天体の3次元質量密度分布を視線方向に積分したもので，すなわち

$$\Sigma(\mathbf{X}_\perp) := \int_{-\infty}^{\infty} dZ \rho(\mathbf{X}) \quad (1.6.12)$$

である．質量面密度分布 $\Sigma(\mathbf{X}_\perp)$ が存在する平面はしばしばレンズ平面と呼ばれる．

重力レンズの曲がり角は重力ポテンシャルの微分から計算されるので，質量密度分布 $\rho(\mathbf{X})$ と重力ポテンシャル $\Phi(\mathbf{X})$ との以下の関係式

$$\Phi(\mathbf{X}) = - \int d\mathbf{X}' \frac{G\rho(\mathbf{X}')}{|\mathbf{X} - \mathbf{X}'|} \quad (1.6.13)$$

に式 (1.6.11) を代入して重力ポテンシャルを計算すると

$$\Phi(\mathbf{X}) = -G \int d\mathbf{X}'_\perp \frac{1}{\sqrt{|\mathbf{X}_\perp - \mathbf{X}'_\perp|^2 + Z^2}} \Sigma(\mathbf{X}'_\perp) \quad (1.6.14)$$

となる．この重力ポテンシャルの表式を用いて，式 (1.6.10) も使って重力ポテンシャルの勾配を計算すると

$$\nabla_\theta \Phi = G a_1 f_K(\chi_1) \int d\mathbf{X}'_\perp \frac{\mathbf{X}_\perp - \mathbf{X}'_\perp}{\left\{ |\mathbf{X}_\perp - \mathbf{X}'_\perp|^2 + Z^2 \right\}^{3/2}} \Sigma(\mathbf{X}'_\perp) \quad (1.6.15)$$

となる．この式の被積分関数が $|Z|$ が大きくなるにつれて急激に小さくなることに着目して

$$\frac{1}{\left\{ |\mathbf{X}_\perp - \mathbf{X}'_\perp|^2 + Z^2 \right\}^{3/2}} \simeq \frac{2\delta^D(Z)}{|\mathbf{X}_\perp - \mathbf{X}'_\perp|^2} \simeq \frac{2a_1^{-1}\delta^D(\chi - \chi_1)}{|\mathbf{X}_\perp - \mathbf{X}'_\perp|^2} \quad (1.6.16)$$

とする近似を採用しよう．上式右辺の a_1^{-1} は， Z が物理座標である一方で χ が共動座標であることに由来している．式 (1.6.16) を式 (1.6.15) に代入すると

$$\nabla_\theta \Phi \simeq 2G f_K(\chi_1) \delta^D(\chi - \chi_1) \int d\mathbf{X}'_\perp \frac{\mathbf{X}_\perp - \mathbf{X}'_\perp}{|\mathbf{X}_\perp - \mathbf{X}'_\perp|^2} \Sigma(\mathbf{X}'_\perp) \quad (1.6.17)$$

となる．式 (1.6.10) を用いて θ を関数とする表式に書き直すと

$$\nabla_\theta \Phi \simeq 2G a_1 \{f_K(\chi_1)\}^2 \delta^D(\chi - \chi_1) \int d\theta' \frac{\theta - \theta'}{|\theta - \theta'|^2} \Sigma(\theta') \quad (1.6.18)$$

と書き換えられる．視線方向で，赤方偏移 z_1 にあるこのレンズ天体のみによって重力レンズ効果が引き起こされるとする単一レンズ平面近似を採用したとして，上記の表式を重力レンズ方程式 (1.6.5) に代入すると

$$\beta = \theta - \frac{4G}{c^2} \frac{a_1 f_K(\chi_1) f_K(\chi_s - \chi_1)}{f_K(\chi_s)} \int d\theta' \frac{\theta - \theta'}{|\theta - \theta'|^2} \Sigma(\theta') \quad (1.6.19)$$

1.6 さまざまな近似

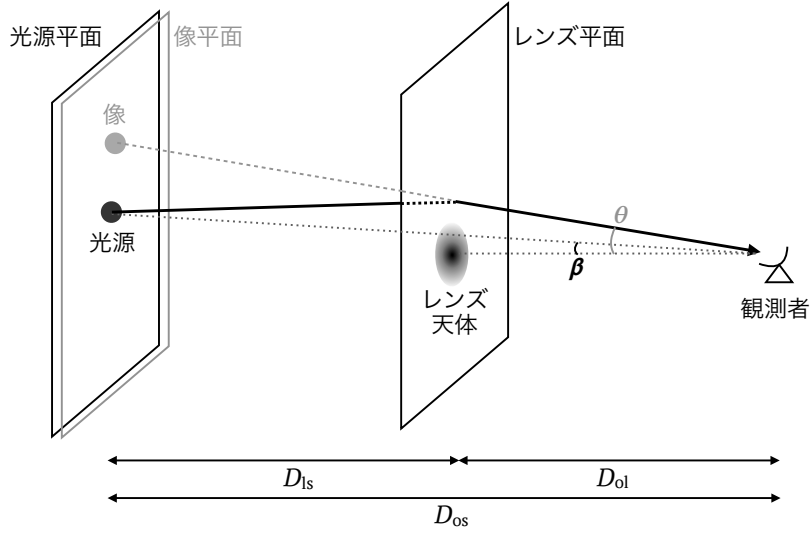


図 1.3 薄レンズ近似および単一レンズ平面近似のもとでの重力レンズ.

となり，薄レンズ近似および単一レンズ平面近似のもとでの重力レンズ方程式の表式の 1 つが得られた．式 (1.6.19) の右辺第 2 項が重力レンズの曲がり角 $\alpha(\theta)$ であり，式 (1.6.7) と同様に，薄レンズ近似のもとでの重力レンズポテンシャルを

$$\psi(\theta) := \frac{4G}{c^2} \frac{a_l f_K(\chi_l) f_K(\chi_s - \chi_l)}{f_K(\chi_s)} \int d\theta' \Sigma(\theta') \ln |\theta - \theta'| \quad (1.6.20)$$

と定義することで，薄レンズ近似および単一レンズ平面近似のもとでの重力レンズ方程式 (1.6.19) を

$$\beta = \theta - \nabla_{\theta} \psi = \theta - \alpha(\theta) \quad (1.6.21)$$

のように式 (1.6.6)，(1.6.9) と同様の表式で書くことができる．図 1.3 に示されているとおり，薄レンズ近似および単一レンズ平面近似のもとでは，レンズ平面で 1 度だけ光の進む向きが変わり，観測者に到達することになる．

式 (1.6.19) や (1.6.20) を，より直接的に観測量と結びつけた量，角径距離を用いて書き換えられた表式もよく用いられるので紹介しておく．赤方偏移 z_1 から z_2 までの角径距離は

$$D_A(z_1, z_2) := \frac{f_K(\chi(z_2) - \chi(z_1))}{1 + z_2} \quad (1.6.22)$$

で与えられるため，観測者からレンズ天体までの角径距離 D_{ol} ，観測者から光源までの角径距離 D_{os} ，レンズ天体から光源までの角径距離 D_{ls} はそれぞれ

$$D_{ol} := D_A(0, z_l) = \frac{f_K(\chi_l)}{1 + z_l} = a_l f_K(\chi_l) \quad (1.6.23)$$

$$D_{os} := D_A(0, z_s) = \frac{f_K(\chi_s)}{1 + z_s} = a_s f_K(\chi_s) \quad (1.6.24)$$

$$D_{ls} := D_A(z_l, z_s) = \frac{f_K(\chi_s - \chi_l)}{1 + z_s} = a_s f_K(\chi_s - \chi_l) \quad (1.6.25)$$

となる。それぞれの角径距離は図 1.3 にも示されている。これらの角径距離を用いて、臨界質量面密度を

$$\Sigma_{\text{cr}} := \frac{c^2}{4\pi G} \frac{D_{\text{os}}}{D_{\text{ol}} D_{\text{ls}}} \quad (1.6.26)$$

と定義すると、式 (1.6.20) の重力レンズポテンシャルは

$$\psi(\boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{\pi} \int d\boldsymbol{\theta}' \frac{\Sigma(\boldsymbol{\theta}')}{\Sigma_{\text{cr}}} \ln |\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}'| \quad (1.6.27)$$

と書き換えられる。重力レンズの計算においてよく使われる、質量面密度分布を臨界質量面密度で規格化した無次元量、収束場

$$\kappa(\boldsymbol{\theta}) := \frac{\Sigma(\boldsymbol{\theta})}{\Sigma_{\text{cr}}} \quad (1.6.28)$$

を用いると、式 (1.6.27) は

$$\psi(\boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{\pi} \int d\boldsymbol{\theta}' \kappa(\boldsymbol{\theta}') \ln |\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}'| \quad (1.6.29)$$

となる。同様に、収束場を用いて曲がり角は

$$\alpha(\boldsymbol{\theta}) = \nabla_{\boldsymbol{\theta}} \psi = \frac{1}{\pi} \int d\boldsymbol{\theta}' \kappa(\boldsymbol{\theta}') \frac{\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}'}{|\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}'|^2} \quad (1.6.30)$$

と表される。

1.7 Fermat の原理を用いた別の導出

Fermat の原理は幾何光学における基礎原理の 1 つであり、光の経路は所要時間が極値をとる、より厳密には停留点となる、ように決定されるという原理である。重力レンズ方程式も Fermat の原理と深く対応していることが知られており [4]、その対応はさまざまな形で現れるが、この節では Fermat の原理に基づく重力レンズ方程式の導出の 1 つを紹介する。

一般相対論では、時空が定常、すなわち計量の時間座標の微分がゼロの場合に、Fermat の原理によって測地線方程式が導出できるので、重力レンズ方程式も同様に導出できると期待される。しかし、式 (1.3.1) で定義される FLRW 計量は、ゆらぎのない完全に一様等方の状況でも定常時空ではなく、このままでは Fermat の原理の適用に問題が生じる。この問題を回避するには

$$d\eta := \frac{dt}{a} \quad (1.7.1)$$

で定義される共形時間 η を用いればよく、その場合計量の時間依存性は全体の係数 a^2 のみとなるが、そのような全体の係数は $ds^2 = 0$ で決まるヌル測地線には影響を与えないために、結局共形時間の変分がゼロとなる条件

$$\delta \int d\eta = 0 \quad (1.7.2)$$

によって光の経路が決まることになる。ゆらぎの成分を加えた、式 (1.4.1) で与えられる計量の場合には、共形時間に変換しても Ψ や Φ の部分に時間依存性が残るが、密度ゆらぎの時間微分に対

1.7 Fermat の原理を用いた別の導出

応する物質の特異速度が光の速さ c より十分小さい場合には、光の経路を計算する上ではそれらの物質成分の運動は無視してよいだろう。この近似を採用すると、式 (1.4.1) で与えられる計量においても、式 (1.7.2) の変分原理によって光の経路が決まることになる。

具体的に、式 (1.7.2) から重力レンズ方程式がどのように導出できるか見てみよう。ヌル条件 $ds^2 = 0$ と計量の定義式 (1.4.1) から

$$\frac{c d\eta}{d\chi} \simeq - \left[1 - \frac{\Phi}{c^2} - \frac{\Psi}{c^2} + \frac{f_K^2(\chi)}{2} \omega_{ab} \frac{dx^a}{d\chi} \frac{dx^b}{d\chi} \right] \quad (1.7.3)$$

となり、式 (1.7.2) に代入して

$$\delta \int_0^{\chi_s} d\chi \left[1 - \frac{\Phi}{c^2} - \frac{\Psi}{c^2} + \frac{f_K^2(\chi)}{2} \omega_{ab} \frac{dx^a}{d\chi} \frac{dx^b}{d\chi} \right] = 0 \quad (1.7.4)$$

が Fermat の原理の具体的な表式となる。ここで L を

$$L \left(x^a, \frac{dx^a}{d\chi}, \chi \right) := 1 - \frac{\Phi}{c^2} - \frac{\Psi}{c^2} + \frac{f_K^2(\chi)}{2} \omega_{ab} \frac{dx^a}{d\chi} \frac{dx^b}{d\chi} \quad (1.7.5)$$

と定義すると、式 (1.7.4) はラグランジアンを積分した作用の変分の式と見ることができ、したがって L が Euler-Lagrange 方程式

$$\frac{d}{d\chi} \left(\frac{\partial L}{\partial(dx^a/d\chi)} \right) - \frac{\partial L}{\partial x^a} = 0 \quad (1.7.6)$$

を満たすことがわかる。式 (1.7.5) を代入して、具体的に Euler-Lagrange 方程式を書き下すと

$$\frac{d}{d\chi} \left[f_K^2(\chi) \omega_{ab} \frac{dx^b}{d\chi} \right] + \frac{1}{c^2} (\Phi_{,a} + \Psi_{,a}) = 0 \quad (1.7.7)$$

が得られる。この式は、少し変形することで、式 (1.4.9) と同一の式となることが示せるので、以前の計算と同様の計算によって、重力レンズ方程式が導出できることがわかる。

第2章 重力レンズの一般的性質

2.1 重力レンズ方程式のまとめ

薄レンズ近似を仮定しレンズ平面を1つだけ考える状況であり、強い重力レンズや重力マイクロレンズ等の計算で使われる。局所平面近似された天球面上の光源の位置を β 、像の位置を θ とすると (図 1.3)、重力レンズ方程式は

$$\beta = \theta - \alpha(\theta) \quad (2.1.1)$$

となる。曲がり角 $\alpha(\theta)$ は重力レンズポテンシャル $\psi(\theta)$ の勾配で与えられ、具体的には

$$\alpha(\theta) = \nabla_{\theta} \psi = \frac{1}{\pi} \int d\theta' \kappa(\theta') \frac{\theta - \theta'}{|\theta - \theta'|^2} \quad (2.1.2)$$

$$\psi(\theta) = \frac{1}{\pi} \int d\theta' \kappa(\theta') \ln |\theta - \theta'| \quad (2.1.3)$$

である。収束場 $\kappa(\theta)$ は質量面密度分布 $\Sigma(\theta)$ と臨界質量面密度 Σ_{cr} との比

$$\kappa(\theta) := \frac{\Sigma(\theta)}{\Sigma_{\text{cr}}} \quad (2.1.4)$$

で定義される。 $\Sigma(\theta)$ は、レンズ天体の近傍で定義されたデカルト座標 $\mathbf{X} = (\mathbf{X}_{\perp}, Z)$ で質量密度分布 $\rho(\mathbf{X})$ を視線方向 Z に沿って積分することで

$$\Sigma(\theta) := \int_{-\infty}^{\infty} dZ \rho(D_{\text{ol}}\theta, Z) \quad (2.1.5)$$

と計算され、 Σ_{cr} は、観測者からレンズ天体までの角径距離、観測者から光源までの角径距離、レンズ天体から光源までの角径距離、をそれぞれ D_{ol} 、 D_{os} 、 D_{ls} 、として

$$\Sigma_{\text{cr}} := \frac{c^2}{4\pi G} \frac{D_{\text{os}}}{D_{\text{ol}} D_{\text{ls}}} \quad (2.1.6)$$

で定義される。

単一平面レンズの場合は、重力レンズポテンシャル $\psi(\theta)$ と質量面密度分布に対応する収束場 $\kappa(\theta)$ の関係は式 (2.1.3) で与えられる。複数レンズ平面の場合でも、それぞれのレンズ平面で同様に重力レンズポテンシャルと質量面密度分布ないし収束場が結びついている。両者の関係をより詳しく見るために、式 (2.1.3) の両辺に θ の Laplace 演算子 $\Delta_{\theta} = \nabla_{\theta}^2$ を作用させると

$$\Delta_{\theta} \psi = \nabla_{\theta} \alpha = \frac{1}{\pi} \int d\theta' \kappa(\theta') \nabla_{\theta} \frac{\theta - \theta'}{|\theta - \theta'|^2} \quad (2.1.7)$$

となる．2次元の Gauss の発散定理を考えることで

$$\nabla_{\theta} \frac{\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}'}{|\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}'|^2} = 2\pi\delta^D(\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}') \quad (2.1.8)$$

が示されるので，この結果を式 (2.1.7) に代入して

$$\kappa(\boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{2} \Delta_{\theta} \psi \quad (2.1.9)$$

という重要な関係式が得られる．この関係式は，2次元の Laplace 演算子の Green 関数が $G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}') = (1/2\pi) \ln |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'|$ であることを知っていれば，式 (2.1.3) から直ちに導くこともでき，力学における重力ポテンシャルと質量密度分布を関係づける Poisson 方程式の重力レンズ版というべき式である．

2.2 像の位置および複数像

上でまとめた重力レンズ方程式，式 (2.1.1) は天球面上の像の位置 $\boldsymbol{\theta}$ を右辺に代入することで光源の位置 β が計算できる式の形になっている．すなわち，重力レンズ方程式は $\boldsymbol{\theta}$ から β への写像を与える．このことから，レンズ天体の質量分布を既知としたとき，像の位置 $\boldsymbol{\theta}$ から光源の位置 β は容易に計算できることがわかる．逆に，光源の位置 β から像の位置 $\boldsymbol{\theta}$ を求めることは，重力レンズ方程式が一般に $\boldsymbol{\theta}$ に関して非線形の方程式であることから，少数の例外を除いて容易ではない．つまり，重力レンズ方程式は重力レンズ効果の「逆変換」を与える式であり，そこから重力レンズ効果の「順変換」，すなわち光源の位置 β から像の位置 $\boldsymbol{\theta}$ への変換，を求めるのは実は自明ではない．この事実は，重力レンズの解析をしばしば困難なものにするのである．

また，重力レンズ方程式が一般に $\boldsymbol{\theta}$ に関して非線形の方程式であることは，ある光源の位置 β に対して，重力レンズ方程式を満たす $\boldsymbol{\theta}$ の解は1つとは限らないことを意味する．重力レンズ方程式の $\boldsymbol{\theta}$ の複数の解こそが，強い重力レンズで観測されている，複数像に対応しているのである！複数像が存在する状況で重力レンズ方程式を $\boldsymbol{\theta}$ について解くためには，多くの場合，数値的に解を探す必要があるが，全ての解を見つけるためには解が存在する可能性をくまなく探索する必要がある，計算量が多くなる．

2.3 像の変形

重力レンズ方程式は，天球面上の光源の位置 β と観測される像の位置 $\boldsymbol{\theta}$ を関係づける方程式である．重力レンズによって，天体の観測される位置がどう変化するかも重要だが，その天体の形状を考えた時に，形状が重力レンズによってどのように変化するかも重要である．天体の形状がどのように変化するかは，光源の位置 β 周りの微小ベクトル $\delta\beta$ を考え，この微小ベクトルが重力レンズでどのように変化するか，つまり像の位置周りの微小ベクトル $\delta\boldsymbol{\theta}$ とどのように結びつくかを見

2.3 像の変形

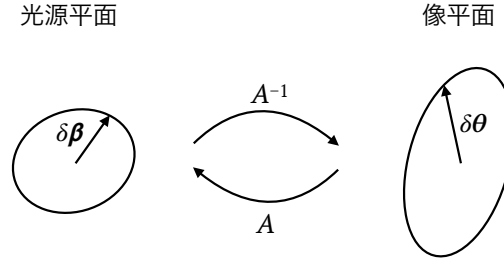


図 2.1 式 (2.3.1) で表される，光源の位置周りの微小ベクトル $\delta\beta$ と像の位置周りの微小ベクトル $\delta\theta$ との関係．

ればよい．具体的には， $\delta\beta$ と $\delta\theta$ の関係は

$$\delta\beta = A(\theta)\delta\theta \quad (2.3.1)$$

のように，Jacobi 行列 $A(\theta)$ によって結びつく． $A(\theta)$ は

$$A(\theta) := \frac{\partial\beta}{\partial\theta} \quad (2.3.2)$$

で定義され，重力レンズ方程式を代入することで計算することができる． β と θ は局所平面座標の 2 成分ベクトルなので，Jacobi 行列は 2×2 行列である．これまでと同様に， $\partial\beta_1/\partial\theta_1 = \beta_{1,\theta_1}$ などのように偏微分をコンマで表すとして，Jacobi 行列を具体的に書き下すと

$$A(\theta) = \begin{pmatrix} \beta_{1,\theta_1} & \beta_{1,\theta_2} \\ \beta_{2,\theta_1} & \beta_{2,\theta_2} \end{pmatrix} \quad (2.3.3)$$

である．重要な注意点として，2.2 節でも議論されたように，重力レンズ方程式は重力レンズのいわば逆変換を計算する方程式であることから，Jacobi 行列 $A(\theta)$ も $\delta\theta$ から $\delta\beta$ への変換に対応する行列であり，図 2.1 に示されているように，重力レンズによる像の変形の逆変換に対応している点がある．

重力レンズポテンシャルが定義できる場合，重力レンズ方程式 $\beta = \theta - \nabla_{\theta}\psi$ から，Jacobi 行列を

$$A(\theta) = \frac{\partial}{\partial\theta} (\theta - \nabla_{\theta}\psi) = \begin{pmatrix} 1 - \psi_{,\theta_1\theta_1} & -\psi_{,\theta_1\theta_2} \\ -\psi_{,\theta_1\theta_2} & 1 - \psi_{,\theta_2\theta_2} \end{pmatrix} \quad (2.3.4)$$

と書き下すことができる．この式からわかる重要な事実として，重力レンズポテンシャルが定義できる場合には Jacobi 行列が対称行列となる．また，式 (2.1.9) より

$$\kappa(\theta) = \frac{1}{2} (\psi_{,\theta_1\theta_1} + \psi_{,\theta_2\theta_2}) \quad (2.3.5)$$

なので，行列 $A(\theta)$ の対角和は

$$\text{tr}(A) = 2 - \psi_{,\theta_1\theta_1} - \psi_{,\theta_2\theta_2} = 2(1 - \kappa) \quad (2.3.6)$$

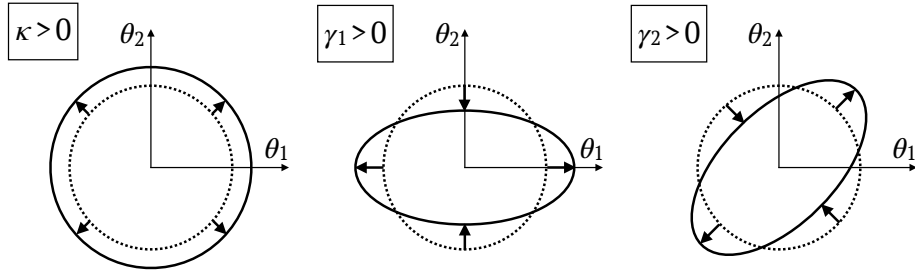


図2.2 重力レンズ効果による，式(2.3.1)と(2.3.9)で与えられる観測される像の変形．収束場 κ は像を拡大縮小し，歪み場 γ_1, γ_2 は像をある方向に引き伸ばす．

となる．この点を踏まえて，歪み場を

$$\gamma_1 := \frac{1}{2}(\psi_{,\theta_1\theta_1} - \psi_{,\theta_2\theta_2}) \quad (2.3.7)$$

$$\gamma_2 := \psi_{,\theta_1\theta_2} \quad (2.3.8)$$

と定義することで，行列 $A(\boldsymbol{\theta})$ を

$$A(\boldsymbol{\theta}) = \begin{pmatrix} 1 - \kappa - \gamma_1 & -\gamma_2 \\ -\gamma_2 & 1 - \kappa + \gamma_1 \end{pmatrix} \quad (2.3.9)$$

と $\kappa, \gamma_1, \gamma_2$ を用いて書き表すことができる．式(2.3.1)から， A が重力レンズの逆変換に対応していることに注意すると，図2.2のように $\kappa, \gamma_1, \gamma_2$ によって重力レンズ像がどのように変形されるかを理解することができる．一例として， $\gamma_1 > 0$ かつ $\kappa = \gamma_2 = 0$ の状況を考えて， $\delta\theta_1 = (1 - \gamma_1)^{-1}\delta\beta_1$ および $\delta\theta_2 = (1 + \gamma_1)^{-1}\delta\beta_2$ となるので，図2.2のように θ_1 方向に引き伸ばされ θ_2 方向は縮むことが理解できるだろう．このように，それぞれの物理的意味を定義から考えることで，収束場 κ は像を一様に拡大または縮小し，歪み場 γ_1, γ_2 は像をある方向に引き伸ばすことが理解できる． γ_1 と γ_2 の違いは，像を引き伸ばす向きの違いである．

注意点として， γ_1 と γ_2 は局所平面座標の向きに依存する，つまり座標系の選び方に依存する量である点をあげておく．この点を見るために，例えば $\theta_1\theta_2$ 平面を角度 α だけ回転させた新しい $\theta'_1\theta'_2$ 座標系を考えると，両者は

$$\theta_1 = \theta'_1 \cos \alpha - \theta'_2 \sin \alpha \quad (2.3.10)$$

$$\theta_2 = \theta'_1 \sin \alpha + \theta'_2 \cos \alpha \quad (2.3.11)$$

で結びつくため，新しい座標系の収束場と歪み場を $\kappa', \gamma'_1, \gamma'_2$ と表したとき

$$\kappa' = \kappa \quad (2.3.12)$$

$$\gamma'_1 = \gamma_1 \cos 2\alpha + \gamma_2 \sin 2\alpha \quad (2.3.13)$$

$$\gamma'_2 = -\gamma_1 \sin 2\alpha + \gamma_2 \cos 2\alpha \quad (2.3.14)$$

となつて、収束場は変化しないが歪み場は変更を受けることがわかる。座標軸の α の回転により、歪み場は 2α の回転行列がかかる形で変化するので、歪み場はスピン 2 の場であるといふことができる。

2.4 増光率と像のパリティ

Liouville の定理によつて、光の伝搬に伴い放射強度は保存することがわかるので、観測される重力レンズ像の明るさは、 β と θ の位置での微小面積の比だけ明るくなる。式 (2.3.1) から、微小面積の比は Jacobi 行列の行列式の逆数で与えられることがわかるので、 θ の位置にある像の増光率 $\mu(\theta)$ を

$$\mu(\theta) := \frac{1}{\det A(\theta)} = \frac{1}{(1 - \kappa)^2 - |\gamma|^2} \quad (2.4.1)$$

のように定義する。ここで

$$|\gamma| := \sqrt{\gamma_1^2 + \gamma_2^2} \quad (2.4.2)$$

は歪み場の大きさである。

面積の比は Jacobi 行列式の絶対値で与えられるので、像の明るさの変化も、あくまで式 (2.4.1) の絶対値

$$|\mu(\theta)| = \left| \frac{1}{\det A(\theta)} \right| = \left| \frac{1}{(1 - \kappa)^2 - |\gamma|^2} \right| \quad (2.4.3)$$

で与えられる。つまり、ある天体に対し重力レンズ効果がない場合の見かけの明るさ、フラックスが F のとき、重力レンズ効果の結果、実際に観測されるフラックスが $|\mu|F$ となるという意味である。

行列式は一般に負の値をとるので、式 (2.4.1) で定義される増光率 μ も負の値をとりうる。増光率の符号、つまり正か負かは、像のパリティが保存するか ($\mu > 0$) 反転するか ($\mu < 0$) に対応している。パリティが反転する場合、天体の見かけの形状がちょうど鏡に映った反転した形状に観測される。

2.5 臨界曲線および焦線

像平面で $\det A = 0$ となる点の集合 $\{\theta_c\}$ は、一般に曲線となる。この曲線は臨界曲線と呼ばれ、具体的には、式 (2.4.1) より

$$[1 - \kappa(\theta_c)]^2 - |\gamma(\theta_c)|^2 = 0 \quad (2.5.1)$$

で決まる曲線である。また、式 (2.4.1) から、臨界曲線上は増光率が形式的に発散することがわかる。臨界曲線を重力レンズ方程式 (2.1.1) や (2.1.7) に代入し得られる光源平面上の曲線 $\{\beta(\theta_c)\}$ は焦線と呼ばれる。

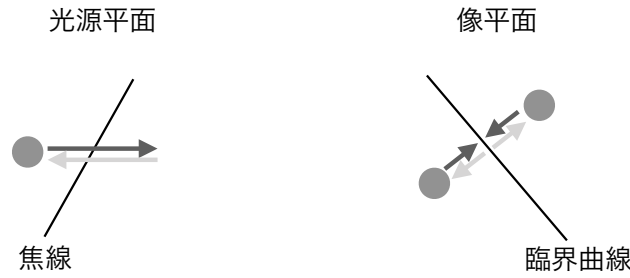


図 2.3 光源天体の焦線の通過による、臨界曲線の周辺での像の生成や消滅の模式図.

2.2 節で議論したように、ある光源の位置 β に対して得られる重力レンズ方程式の複数の θ の解が重力レンズ複数像に対応している。図 2.3 の模式図でも示されるとおり、光源の位置を動かしていくと、光源が焦線を通過した時に複数像が臨界曲線で生成されたり消滅したりするので、臨界曲線と焦線は重力レンズ複数像を議論する上で重要な役割を果たす。

2.6 時間の遅れ

複数像はそれぞれ異なる経路を通ってくるので、同じ時刻に光源から発せられた光が観測者に到達する時の時刻の差、すなわち時間の遅れ Δt が生じる。時間の遅れは、強い重力レンズにおける重要な観測量であり、宇宙論パラメータの測定をはじめ、さまざまな応用がある。複数像間の到達時間の差を計算するために、まずは 1 個の重力レンズ像に対して、重力レンズ効果を受けずに光が真っ直ぐ観測者に到達する場合に比べて、重力レンズによって光の到達時刻がどのように変わるかを計算しよう。

時間の遅れの計算で重要になる概念が宇宙論的な時間の膨張なので、まずはこの概念を説明する。共動座標で距離 χ の位置にある光源から時刻 t_1 , $t_1 + \delta t_1$ に発せられた光を、 $\chi = 0$ の原点にいる観測者が時刻 t_0 , $t_0 + \delta t_0$ で観測するとすると

$$\chi = \int_{t_1}^{t_0} \frac{c dt}{a} = \int_{t_1 + \delta t_1}^{t_0 + \delta t_0} \frac{c dt}{a} \quad (2.6.1)$$

となるので、これより

$$\delta t_0 = \frac{a(t_0)}{a(t_1)} \delta t_1 = (1 + z) \delta t_1 \quad (2.6.2)$$

となる。すなわち、赤方偏移 z での時間差 δt_1 は、観測者には $\delta t_0 = (1 + z) \delta t_1$ のように $(1 + z)$ 倍に引き伸ばされて観測されるのである。例として、遠方の超新星爆発の光度曲線も、宇宙論的な時間の膨張によって時間方向に $(1 + z)$ 倍引き伸ばされるため、あたかも超新星爆発がより長時間持続しているように観測されることになるのである。このような宇宙膨張に起因する時間間隔の増加が、宇宙論的な時間の膨張である。

宇宙論的な時間の膨張を考慮すると、ある重力レンズ像に対する、重力レンズに起因する観測される到達時刻の遅れは、重力レンズ効果を考えない場合と考えた場合のそれぞれの経路に沿った

2.6 時間の遅れ

dt/a の積分の差を考えて

$$\Delta t := \int_{\text{重力レンズあり}} \frac{dt}{a} - \int_{\text{重力レンズなし}} \frac{dt}{a} \quad (2.6.3)$$

と書くことができるだろう。 dt/a の具体的な表式として、式 (1.7.3) の近似式を用い、 $\Phi = \Psi$ としてかつ局所平面近似 $\omega_{ab} = \delta_{ab}$ を採用すると、式 (2.6.3) を

$$\Delta t = \frac{1}{c} \int_0^{\chi_s} d\chi \left[\frac{f_K^2(\chi)}{2} \left| \frac{d\theta}{d\chi} \right|^2 - \frac{2\Phi}{c^2} \right] \quad (2.6.4)$$

と具体的に書き下すことができる。式 (2.6.4) の右辺第 1 項は、光の経路の違いによる純粋に幾何学的な効果に由来し、右辺第 2 項は、重力場によって時間の進みが遅くなる重力的な効果を表す。それぞれ Δt_{geom} 、 Δt_{grav} とおくと、これらは具体的に

$$\Delta t_{\text{geom}} = \frac{1}{c} \int_0^{\chi_s} d\chi \frac{f_K^2(\chi)}{2} \left| \frac{d\theta}{d\chi} \right|^2 \quad (2.6.5)$$

$$\Delta t_{\text{grav}} = -\frac{1}{c} \int_0^{\chi_s} d\chi \frac{2\Phi}{c^2} \quad (2.6.6)$$

と書き表せる。

この表式に基づいて、具体的に時間の遅れがどのように計算されるかを見てみよう。まず、幾何学的な時間の遅れ Δt_{geom} を計算するために、レンズ平面と光源平面の間を光が伝搬している状況を考える。レンズ平面での局所的な曲がり角を $\hat{\alpha}$ と書き表すと

$$\hat{\alpha} = \frac{f_K(\chi_s)}{f_K(\chi_s - \chi_1)} (\theta - \beta) \quad (2.6.7)$$

となる。また、この角度 $\hat{\alpha}$ を用いて、 $\chi_1 < \chi < \chi_s$ を満たす共動動径距離 χ の位置での光の天球座標 $\theta^{\text{ls}}(\chi)$ は、これらのレンズ平面の間を光が真っ直ぐ伝搬するとして

$$\theta^{\text{ls}}(\chi) = \theta - \frac{f_K(\chi - \chi_1)}{f_K(\chi)} \hat{\alpha} \quad (2.6.8)$$

と書くことができるだろう。この表式を χ で微分すると、

$$\frac{d\theta^{\text{ls}}}{d\chi} = \left[\frac{f_K(\chi - \chi_1) f_K'(\chi)}{f_K^2(\chi)} - \frac{f'(\chi - \chi_1)}{f_K(\chi)} \right] \hat{\alpha} = -\frac{f_K(\chi_1)}{f_K^2(\chi)} \hat{\alpha} \quad (2.6.9)$$

と計算できるので、幾何学的な時間の遅れ Δt_{geom} は、式 (2.6.5) より

$$\Delta t_{\text{geom}} = \frac{1}{c} \int_{\chi_1}^{\chi_s} d\chi \frac{f_K^2(\chi)}{2} \left| \frac{d\theta^{\text{ls}}}{d\chi} \right|^2 = \frac{1}{c} \frac{f_K(\chi_s - \chi_1) f_K(\chi_1)}{f_K(\chi_s)} \frac{|\hat{\alpha}|^2}{2} \quad (2.6.10)$$

と計算できる。さらに、式 (2.6.7) を代入することで

$$\Delta t_{\text{geom}} = \frac{1}{c} \frac{f_K(\chi_1) f_K(\chi_s)}{f_K(\chi_s - \chi_1)} \frac{|\theta - \beta|^2}{2} \quad (2.6.11)$$

となる。式 (1.6.22) の角径距離を用いると、幾何学的な時間の遅れは

$$\Delta t_{\text{geom}} = \frac{1 + z_l}{c} \frac{D_{\text{ol}} D_{\text{os}}}{D_{\text{ls}}} \frac{|\theta - \beta|^2}{2} \quad (2.6.12)$$

第2章 重力レンズの一般的性質

と書き表せる.

次に, 重力的な時間の遅れ Δt_{grav} を計算しよう. 式 (1.6.18) より, 薄レンズ近似のもとでのレンズ平面の重力ポテンシャル Φ は

$$\Phi(\boldsymbol{\theta}) \simeq \frac{2G}{1+z_l} \{f_K(\chi_l)\}^2 \delta^D(\chi - \chi_l) \int d\boldsymbol{\theta}' \Sigma(\boldsymbol{\theta}') \ln |\boldsymbol{\theta}_i - \boldsymbol{\theta}'| \quad (2.6.13)$$

と書けることがわかる. 重力レンズポテンシャル ψ を用いて書き換えると

$$\Phi(\boldsymbol{\theta}) \simeq \frac{c^2}{2} \frac{f_K(\chi_l) f_K(\chi_s)}{f_K(\chi_s - \chi_l)} \delta^D(\chi - \chi_l) \psi(\boldsymbol{\theta}) \quad (2.6.14)$$

となり, この式を式 (2.6.6) に代入することで, 重力的な時間の遅れ Δt_{grav} は

$$\Delta t_{\text{grav}} = -\frac{1}{c} \frac{f_K(\chi_l) f_K(\chi_s)}{f_K(\chi_s - \chi_l)} \psi(\boldsymbol{\theta}) \quad (2.6.15)$$

となる. 幾何学的な時間の遅れの場合と同様に, 角径距離を用いて書き換えると

$$\Delta t_{\text{grav}} = -\frac{1+z_l}{c} \frac{D_{ol} D_{os}}{D_{ls}} \psi(\boldsymbol{\theta}) \quad (2.6.16)$$

となる.

最終的に, 式 (2.6.12) と式 (2.6.16) を組み合わせて, 時間の遅れは

$$\Delta t = \frac{1+z_l}{c} \frac{D_{ol} D_{os}}{D_{ls}} \left[\frac{|\boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\theta}|^2}{2} - \psi(\boldsymbol{\theta}) \right] \quad (2.6.17)$$

となる.

観測される像が1個の場合は, 光源からの光の重力レンズがない場合の到達時刻との比較もできないため, 時間の遅れを観測することはできない. 時間の遅れは, 重力レンズ複数像が観測された時に, 光源からの光の到達時刻の差として観測される. 例えば, 式 (2.6.17) で表せられる, 光源の位置 $\boldsymbol{\beta}$ および像の位置 $\boldsymbol{\theta}$ の場合の時間の遅れを $\Delta t(\boldsymbol{\theta}; \boldsymbol{\beta})$ のように書き表すこととし, ある光源の位置 $\boldsymbol{\beta}$ に対して複数像が $\boldsymbol{\theta}_A$ および $\boldsymbol{\theta}_B$ の位置に観測されている状況を考えると, それらの複数像の間の時間の遅れ, すなわち到達時刻の差

$$\Delta t_{AB} := \Delta t(\boldsymbol{\theta}_A; \boldsymbol{\beta}) - \Delta t(\boldsymbol{\theta}_B; \boldsymbol{\beta}) \quad (2.6.18)$$

を観測することができる.

ただし, 光源が通常の銀河のように, その明るさが短い時間スケールで変化しない天体の場合は, 時間の遅れは観測できない. 時間の遅れは, クエーサーや超新星爆発など, 明るさが年や月などの短い時間スケールで変動する天体が, 重力レンズ効果によって複数像が形成される場合にのみ観測される.

最後に, 式 (2.6.17) の時間の遅れの表式は, その導出から, 実は重力レンズ方程式の解となっていない $\boldsymbol{\beta}$ と $\boldsymbol{\theta}$ の組に対しても正しい時間の遅れの表式になっている. Fermat の原理の要請は, 実

2.6 時間の遅れ

現され観測される光の経路は、時間の遅れが停留点となる経路である、というものである。具体的に単一レンズ平面の場合に見てみると、Fermat の原理から

$$\nabla_{\theta} \Delta t = 0 \quad (2.6.19)$$

が要請され、式 (2.6.17) を代入して計算すると

$$\theta - \beta - \nabla_{\theta} \psi = 0 \quad (2.6.20)$$

となり、重力レンズ方程式 (2.1.1) を確かに再現することが見てとれる。

第3章 重力レンズ方程式とその解の具体的な例

3.1 球対称レンズの一般論

重力レンズ天体が球対称のとき、天球座標の原点を質量面密度分布の中心にとったとすると、式(2.1.4)で与えられる収束場 $\kappa(\theta)$ も、2次元天球座標で原点周りの回転について対称である。よって、収束場は

$$\theta := |\boldsymbol{\theta}| \quad (3.1.1)$$

のみの関数として $\kappa(\theta)$ と書ける。このとき、重力レンズポテンシャルを、式(2.1.3)から、 $(\theta_1, \theta_2) = (\theta \cos \varphi, \theta \sin \varphi)$ の極座標を用いて計算すると

$$\psi(\boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty d\theta' \int_0^{2\pi} d\varphi' \theta' \kappa(\theta') \ln \sqrt{\theta^2 + \theta'^2 - 2\theta\theta' \cos \varphi'} \quad (3.1.2)$$

となる。ここで $\theta > 0$, $\theta' > 0$ の場合に成り立つ積分公式

$$\int_0^{2\pi} d\varphi' \ln \sqrt{\theta^2 + \theta'^2 - 2\theta\theta' \cos \varphi'} = \pi \ln \left[\frac{1}{2} (\theta^2 + \theta'^2 + |\theta^2 - \theta'^2|) \right] = \begin{cases} 2\pi \ln \theta & (\theta \geq \theta') \\ 2\pi \ln \theta' & (\theta < \theta') \end{cases} \quad (3.1.3)$$

を用いると、式(3.1.2)はさらに

$$\psi(\boldsymbol{\theta}) = 2 \int_0^\theta d\theta' \theta' \kappa(\theta') \ln \theta + 2 \int_\theta^\infty d\theta' \theta' \kappa(\theta') \ln \theta' \quad (3.1.4)$$

と計算できる。重力レンズポテンシャルに定数項を足してもその後の議論には影響を与えないため

$$\psi(\boldsymbol{\theta}) - 2 \int_0^\infty d\theta' \theta' \kappa(\theta') \ln \theta' \rightarrow \psi(\boldsymbol{\theta}) \quad (3.1.5)$$

のように定数項を足したものを重力レンズポテンシャルと定義しなおすと、最終的に

$$\psi(\boldsymbol{\theta}) = 2 \int_0^\theta d\theta' \theta' \kappa(\theta') \ln \left(\frac{\theta}{\theta'} \right) \quad (3.1.6)$$

が示せ、重力レンズポテンシャルも θ のみの関数として書けることがわかる。

曲がり角は重力レンズポテンシャルの勾配で与えられる。式(3.1.6)の重力レンズポテンシャルの表式を用いて計算すると、球対称レンズの場合の曲がり角を

$$\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\theta}) = \nabla_{\boldsymbol{\theta}} \psi(\boldsymbol{\theta}) = \left[\frac{2}{\theta^2} \int_0^\theta d\theta' \theta' \kappa(\theta') \right] \boldsymbol{\theta} = \bar{\kappa}(<\boldsymbol{\theta}) \boldsymbol{\theta} \quad (3.1.7)$$

第3章 重力レンズ方程式とその解の具体的な例

と求めることができる。ただし

$$\bar{\kappa}(<\theta) := \frac{2}{\theta^2} \int_0^\theta d\theta' \theta' \kappa(\theta') \quad (3.1.8)$$

は半径 θ 内で $\kappa(\theta)$ を平均した平均収束場である。結果を重力レンズ方程式 (2.1.1) に代入すると、 β と θ が平行でなくてはならないことがわかる。言い換えると、天球面上で球対称レンズの中心、光源の位置、および複数像の位置は常に一直線上に並ぶことになる。このため、光源の位置ベクトルの大きさ、すなわち天球面上での球対称レンズの中心と光源との距離を

$$\beta := |\beta| \quad (3.1.9)$$

と書くことにすると、重力レンズ方程式は

$$\beta = \theta - \alpha(\theta) = [1 - \bar{\kappa}(<\theta)]\theta \quad (3.1.10)$$

と1次元の方程式に帰着するため、その解析が大幅に簡単化されることになる。ただし、上の式では、式 (3.1.7) より曲がり角の大きさが

$$\alpha(\theta) = \bar{\kappa}(<\theta)\theta \quad (3.1.11)$$

となることを用いた。

式 (2.3.7) および (2.3.8) に従って、球対称レンズ中心から θ 離れた $\theta = (\theta_1, \theta_2)$ での歪み場を計算すると

$$\gamma_1 = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial(\bar{\kappa}\theta_1)}{\partial\theta_1} - \frac{\partial(\bar{\kappa}\theta_2)}{\partial\theta_2} \right] = -(\bar{\kappa} - \kappa) \frac{\theta_1^2 - \theta_2^2}{\theta^2} \quad (3.1.12)$$

$$\gamma_2 = \frac{\partial(\bar{\kappa}\theta_1)}{\partial\theta_2} = -(\bar{\kappa} - \kappa) \frac{2\theta_1\theta_2}{\theta^2} \quad (3.1.13)$$

となる。ただし、 $\kappa = \kappa(\theta)$ は収束場、 $\bar{\kappa} = \bar{\kappa}(<\theta)$ は式 (3.1.8) で定義される平均収束場である。歪み場の大きさは

$$|\gamma| := \sqrt{\gamma_1^2 + \gamma_2^2} = |\bar{\kappa} - \kappa| \quad (3.1.14)$$

となることもわかる。

レンズ天体の質量分布は、通例中心近くで密度が高いため、一般に $\bar{\kappa}(<\theta) > \kappa(\theta)$ となることが期待され、ここではそのような状況を考えることとする。式 (2.3.1) と (2.3.9) を用いて、さらに簡単のため κ を無視し $|\gamma_1| \ll 1$, $|\gamma_2| \ll 1$ とすると

$$\delta\theta \simeq \begin{pmatrix} 1 - \gamma_1 & -\gamma_2 \\ -\gamma_2 & 1 + \gamma_1 \end{pmatrix}^{-1} \delta\beta \simeq \begin{pmatrix} 1 + \gamma_1 & \gamma_2 \\ \gamma_2 & 1 - \gamma_1 \end{pmatrix} \delta\beta \quad (3.1.15)$$

となることから、球対称レンズの歪み場はレンズ周りの円の接線方向を向くことがわかる。この考察から、球対称レンズの接線歪み場を

$$\gamma_+(\theta) := \bar{\kappa}(<\theta) - \kappa(\theta) \quad (3.1.16)$$

3.1 球対称レンズの一般論

と定義でき、球対称レンズにおける歪み場の大きさを接線歪み場で特徴づけることができる。上で議論した、中心集中した通常の質量分布では $\gamma_+(\theta) > 0$ となり、このとき歪み場はレンズ周りの円の接線方向を向くことになる。弱い重力レンズでは、基本的に接線歪み場で決まるこの円の接線方向の銀河の形状の歪みから、重力レンズ効果を測定することになる。またこの考察から、 $\gamma_+(\theta) < 0$ 、すなわち $\bar{\kappa}(< \theta) < \kappa(\theta)$ の状況ではレンズ天体周りの銀河は接線方向ではなく動径方向に歪むことがわかる。宇宙の低密度領域、ボイドではこの条件が満たされており、実際に弱い重力レンズ効果による背景銀河の動径方向の歪みも観測されている [5]。

式 (3.1.12) および (3.1.13) で与えられる歪み場の表式から、球対称レンズの増光率の表式も求めておこう。式 (2.4.1) の増光率の定義から具体的に計算すると

$$\mu(\theta) = \frac{1}{(1 - \bar{\kappa})(1 - 2\kappa + \bar{\kappa})} \quad (3.1.17)$$

となり、やはり θ のみの関数になることがわかる。すなわち、球対称レンズでは、臨界曲線と焦線はともに円となるのである。

天球面上で光源の位置と球対称レンズの中心が一致する時、すなわち $\beta = 0$ の場合に何が起こるかを考察しよう。この場合、どの方位角に対しても球対称レンズの中心、光源の位置、および複数像の位置が一直線となる条件を満たすことから、像はレンズ天体の周りのある半径の円になると考えられる。このような円は Einstein リングと呼ばれ、その半径 θ_{Ein} は Einstein 半径と呼ばれる。Einstein 半径を計算するためには、式 (3.1.10) で $\beta = 0$ とおけばよく、Einstein 半径が

$$\bar{\kappa}(< \theta_{\text{Ein}}) = 1 \quad (3.1.18)$$

を満たすことがわかる。式 (3.1.17) から Einstein リングは臨界曲線上に現れることもわかる。光源が点状の場合は増光率が形式的に発散することになるが、実際は光源はある大きさを持つことから、Einstein リングは円環となる。

レンズ天体の視線方向に投影したレンズ平面の半径 θ 内の質量、すなわち円柱内の全質量を

$$M(< \theta) := D_{\text{ol}}^2 \int_0^\theta d\theta' 2\pi\theta' \Sigma(\theta') \quad (3.1.19)$$

で定義したとすると、式 (3.1.18) は、Einstein 半径の観測から、Einstein 半径内の全質量を

$$M(< \theta_{\text{Ein}}) = \pi D_{\text{ol}}^2 \theta_{\text{Ein}}^2 \Sigma_{\text{cr}} \quad (3.1.20)$$

から測定できることを意味している。この結果はレンズ天体の動径密度分布に対して何の仮定も置いていない、きわめて一般的な結果であることに注意しよう。実際にはレンズ天体の質量分布は必ずしも球対称ではないが、重力レンズ複数像の観測から Einstein 半径は精度良く測定することができるので、強い重力レンズ観測によって Einstein 半径内の全質量の信頼性の高い測定ができる。

3.2 球対称レンズにおける複数像

球対称レンズの重力レンズ方程式 (3.1.10) をもとに、点状光源と広がった光源の両方の場合において、どのような複数像が期待されるかについての一般的な議論を行う [6].

まず、球対称レンズの場合の1次元の重力レンズ方程式について、ある β を与えたときの解は Y - θ 平面の以下の2つの曲線

$$Y = \theta - \beta \quad (3.2.1)$$

$$Y = \alpha(\theta) \quad (3.2.2)$$

の交点と見ることができる. 式 (3.2.1) は $-\beta$ を切片とし、 θ 軸と $\theta = \beta$ で交わる直線であり、式 (3.2.2) は、球対称レンズの質量分布によって曲がり角 $\alpha(\theta)$ の形状も変化するため、具体的に 3.3 節で紹介するようにさまざまな状況が考えられる. また、 $\theta := |\theta|$ はその定義から $\theta \geq 0$ のみを考えるべきではあるが、式 (3.1.7) から

$$\alpha(-\theta) = -\bar{\kappa}(< \theta)\theta \quad (3.2.3)$$

なので、1次元の重力レンズ方程式の曲がり角について

$$\alpha(-\theta) = -\alpha(\theta) \quad (3.2.4)$$

と解釈すると、球対称レンズの1次元の重力レンズ方程式 (3.1.10) を $\theta < 0$ にまで拡張して考えることができる. 重力レンズポテンシャルの微分が曲がり角なので、重力レンズポテンシャルについては

$$\psi(-\theta) = \psi(\theta) \quad (3.2.5)$$

として $\theta < 0$ に拡張することになる.

この方法を用いて、ある曲がり角 $\alpha(\theta)$ の場合に、複数像の個数やその位置を実際に考察した例を、図 3.1 に示す. ある β の値を採用すると、式 (3.2.1) と (3.2.2) が3箇所で交わるので、複数像が θ_A , θ_B , θ_C の位置に3個存在することがわかる. また $\beta' > \beta$ を満たすある β' まで光源の位置を外側に移動させると、交点が1箇所になり、複数像も θ'_A の位置の1個になることが見てとれる. 式 (3.2.1) と (3.2.2) がちょうど接する、複数像が1個と3個の境界を与える β が焦線の半径となる. このような図を描くことによって、それぞれの球対称な質量モデルに対して、期待される解の個数やその変化が視覚的に理解できて便利である.

次に、図 3.2 左に、2次元像平面における点状光源の複数像の位置の例を示している. 図 3.1 の例と同様に、3個の複数像が形成される状況を示しており、全ての複数像が球対称レンズの中心に対応する座標原点と光源の位置を結ぶ直線上に存在していることが見てとれる. この事実を利用することで、広がった光源の重力レンズ像についても、その性質を図 3.2 右のように理解することができる. より具体的には、光源の位置と像の位置が一直線上に乗る条件から、複数像はそれぞれの

3.3 球対称レンズの具体例

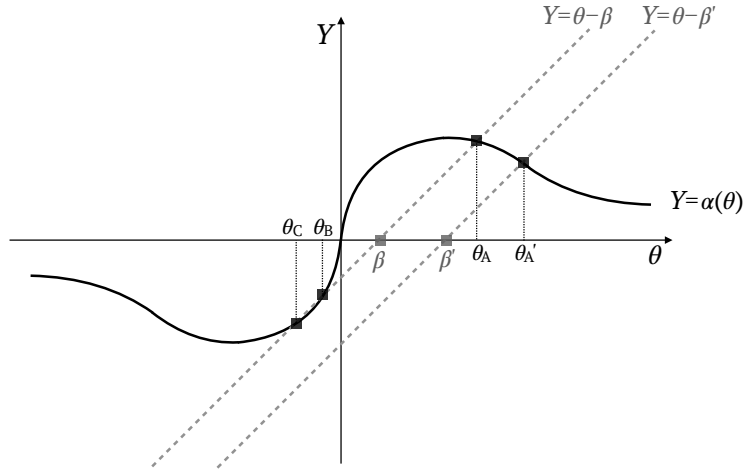


図 3.1 球対称レンズの重力レンズ方程式の解と像の位置の図形的考察.

位置で図の点線で示される幅を持つことがわかり、相似関係より、球対称レンズを中心とする円の接線方向に、その大きさが θ/β 倍されることがわかる。動径方向には、光源の位置が $d\beta$ 変わるのに対して像の位置が $d\theta$ 動くことから、その大きさが $d\theta/d\beta$ されることが考えられる。以上の考察から、接線方向の増光率が

$$\mu_t := \frac{\theta}{\beta} = \frac{1}{1 - \bar{\kappa}} \quad (3.2.6)$$

となり、動径方向の増光率が

$$\mu_r := \frac{d\theta}{d\beta} = \frac{1}{1 - 2\bar{\kappa} + \bar{\kappa}} \quad (3.2.7)$$

となって、像の増光率はそれらの積

$$\mu = \mu_t \mu_r = \frac{1}{(1 - \bar{\kappa})(1 - 2\bar{\kappa} + \bar{\kappa})} \quad (3.2.8)$$

で与えられると考えられる。このようにして得られた増光率が、定義から計算した式 (3.1.17) の増光率と確かに一致していることが確認できる。また、この結果から、複数像が接線方向と動径方向のどちらの方向に歪むかは、 μ_t と μ_r の大きさの比較によって決まることもわかる。 $\mu_t^{-1} = 0$ および $\mu_r^{-1} = 0$ から得られる臨界曲線は、接線臨界曲線および動径臨界曲線と呼ばれる。さらに、 μ_t と μ_r はどちらも正と負の値をとりうるが、その符号は接線方向と動径方向で向きを保つか反転するかに対応していることも、図 3.2 から理解できるだろう。

3.3 球対称レンズの具体例

3.3.1 点質量レンズ

点質量レンズは、質量密度分布が

$$\rho(\mathbf{r}) = M\delta^D(\mathbf{r}) \quad (3.3.1)$$

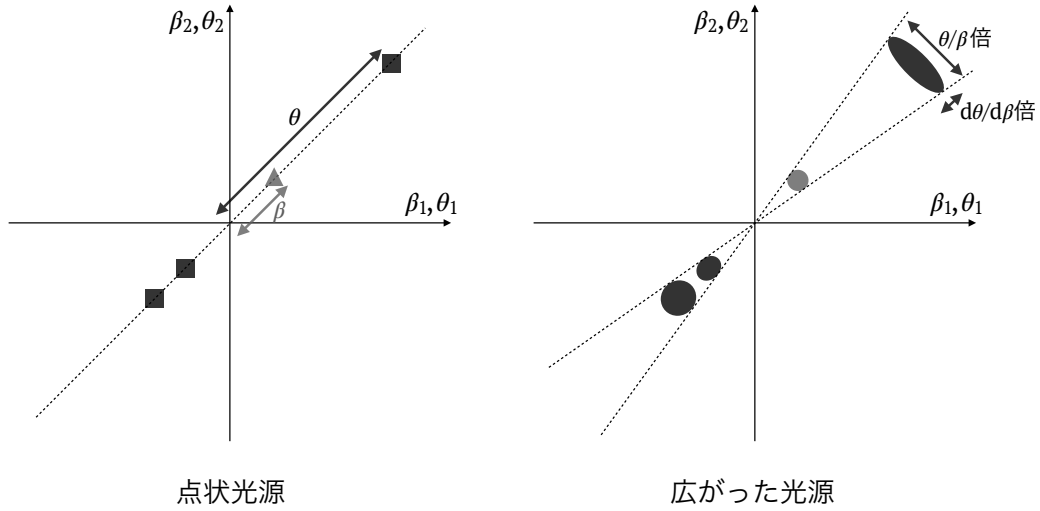


図3.2 点状光源(左)と広がった光源(右)の重力レンズ複数像. 点状光源については3角の光源の位置に対する3個の複数像の位置を4角で示している. 広がった光源については, 灰色の丸い光源に対して, 黒色の3個の複数像の位置と形状を示している.

と Dirac のデルタ関数で与えられる質量モデルであり, 星やブラックホールがレンズ天体となる場合の質量モデルとしてよく採用される. 重力マイクロレンズにおいて, 重要な役割を果たす質量モデルである. 収束場を計算すると

$$\kappa(\boldsymbol{\theta}) = \frac{4\pi GM}{c^2} \frac{D_{ls}}{D_{ol}D_{os}} \delta^D(\boldsymbol{\theta}) \quad (3.3.2)$$

となり, 式(3.1.8)で与えられる平均収束場は

$$\bar{\kappa}(<\theta) = \frac{1}{\pi\theta^2} \int_{|\boldsymbol{\theta}'|<\theta} d\boldsymbol{\theta}' \kappa(\boldsymbol{\theta}') = \frac{4GM}{c^2} \frac{D_{ls}}{D_{ol}D_{os}} \frac{1}{\theta^2} \quad (3.3.3)$$

と計算できる. したがって, $\bar{\kappa}(<\theta_{\text{Ein}}) = 1$ を満たす Einstein 半径を

$$\theta_{\text{Ein}} = \sqrt{\frac{4GM}{c^2} \frac{D_{ls}}{D_{ol}D_{os}}} \quad (3.3.4)$$

と求めることができる. この Einstein 半径を用いて, 平均収束場および式(3.1.16)で定義される接線歪み場を書き表すと

$$\bar{\kappa}(<\theta) = \gamma_+(\theta) = \frac{\theta_{\text{Ein}}^2}{\theta^2} \quad (3.3.5)$$

となる. さらに, 式(3.1.11)から曲がり角を計算することで, 点質量レンズの重力レンズ方程式を

$$\beta = \theta - \frac{\theta_{\text{Ein}}^2}{\theta} \quad (3.3.6)$$

と求めることができる. 曲がり角の表式から, 重力レンズポテンシャルが

$$\psi(\theta) = \theta_{\text{Ein}}^2 \ln \theta \quad (3.3.7)$$

3.3 球対称レンズの具体例

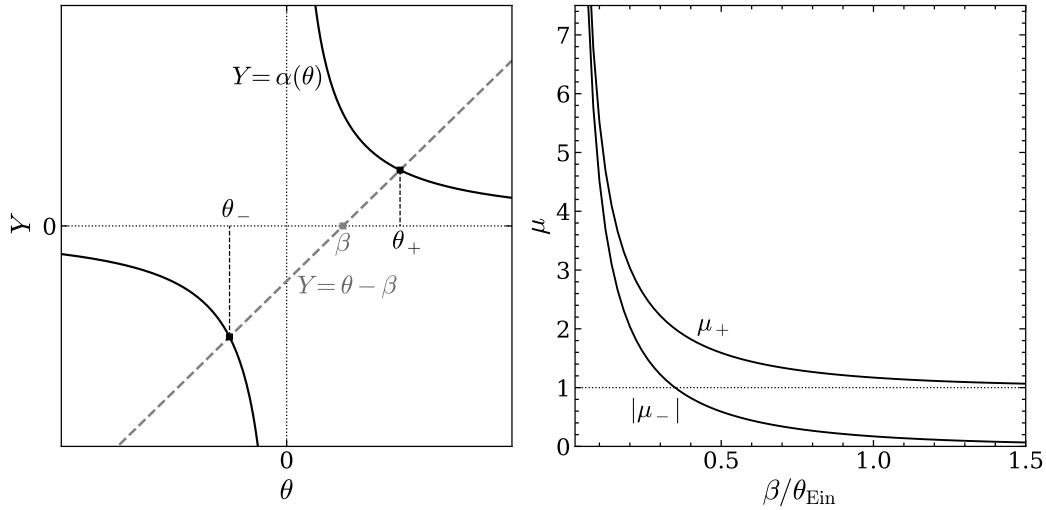


図 3.3 点質量レンズの重力レンズ方程式の図形的考察 (左), および光源の位置 β とそれぞれの像の増光率との関係 (右).

となることもわかる.

図 3.3 左からわかるように, 点質量レンズの重力レンズ方程式 (3.3.6) は全ての β の値に対して必ず 2 個の解を持つため, どの位置の光源に対しても常に 2 個の複数像が形成される. 天球面上の光源の位置が点質量レンズから大きく離れていても複数像が形成されるのは一見奇妙だが, これはもちろん中心で発散する特異的な質量密度分布を採用しているからである. 実際は, 星であってもブラックホールであっても, ある有限の大きさを持つため, 点質量レンズのデルタ関数の近似は, 複数像の 1 個がレンズ天体に十分近づいたある段階で破綻することになる.

いずれにせよ, 点質量レンズの複数像の位置と増光率は容易に計算できるので求めておこう. Einstein 半径で規格化した光源の位置を

$$y := \frac{\beta}{\theta_{\text{Ein}}} \quad (3.3.8)$$

とおくと, 複数像の位置は式 (3.3.6) を θ についての 2 次方程式と見て解くことで得られ, 具体的には 2 個の複数像の位置 θ_+ と θ_- は, 複合同順として

$$\frac{\theta_{\pm}}{\theta_{\text{Ein}}} = \frac{y \pm \sqrt{y^2 + 4}}{2} \quad (3.3.9)$$

となる. それぞれの像の増光率は, 式 (3.1.17) から計算すると

$$\mu_{\pm} = \left[1 - \left(\frac{\theta_{\text{Ein}}}{\theta_{\pm}} \right)^4 \right]^{-1} = \frac{1}{2} \pm \frac{y^2 + 2}{2y\sqrt{y^2 + 4}} \quad (3.3.10)$$

である. 図 3.3 右に光源の位置とそれぞれの像の増光率の関係を示す. $y \gg 1$, すなわち $\beta \gg \theta_{\text{Ein}}$ の極限で, $|\mu_+| \simeq 1$ および $|\mu_-| \simeq 0$ となり, 重力レンズ効果が実質的に無視できることが確認できる. 一方で, $y \ll 1$, すなわち $\beta \ll \theta_{\text{Ein}}$ では $|\mu_+| \simeq |\mu_-| \simeq 1/y \gg 1$ である. 2 個の複数像の増光率

の和, すなわち全増光率は

$$\mu_{\text{tot}} = |\mu_+| + |\mu_-| = \frac{y^2 + 2}{y\sqrt{y^2 + 4}} \quad (3.3.11)$$

で与えられる. 式 (3.3.10) から, 増光率が発散する臨界曲線は $\theta = \theta_{\text{Ein}}$ の円のみであることもわかり, 対応する焦線は $\beta = 0$ で原点に縮退している. このことは点質量レンズにおいて複数像の個数が変化しないことと整合的である.

さらに, 時間の遅れを式 (2.6.17) から計算すると, それぞれの複数像に対して

$$\Delta t(\theta_{\pm}; \beta) = \frac{1 + z_l}{c} \frac{D_{\text{ol}} D_{\text{os}}}{D_{\text{ls}}} \theta_{\text{Ein}}^2 \left(\frac{\theta_{\text{Ein}}^2}{2\theta_{\pm}^2} - \ln|\theta_{\pm}| \right) = \frac{4GM(1 + z_l)}{c^3} \left(\frac{\theta_{\text{Ein}}^2}{2\theta_{\pm}^2} - \ln|\theta_{\pm}| \right) \quad (3.3.12)$$

と計算できる. 重力レンズポテンシャルについては, 式 (3.2.5) から θ_{\pm} の絶対値を代入していることに注意する. 点質量レンズの時間の遅れは, Schwarzschild 半径 $2GM/c^2$ の長さを光が通過する時間のオーダーであることがわかる. 観測される時間の遅れは 2 個の複数像の時間の遅れの差であり, これを式 (3.3.8) で定義される, 規格化された光源の位置 y の関数として書き表すと

$$\Delta t(\theta_-; \beta) - \Delta t(\theta_+; \beta) = \frac{4GM(1 + z_l)}{c^3} \left[\frac{y\sqrt{y^2 + 4}}{2} + \ln \left(\frac{\sqrt{y^2 + 4} + y}{\sqrt{y^2 + 4} - y} \right) \right] \quad (3.3.13)$$

となる. β が大きいほど 2 個の複数像の経路が非対称的になり経路差が大きくなるため, 時間の遅れの差は y の増加関数となっている. またこの表式より, ある時刻に光源から発せられた光は, θ_+ に先に到達し, その後, 式 (3.3.13) で表される時間差ののちに θ_- で観測されることもわかる.

3.3.2 特異等温球

特異等温球は, 銀河や銀河団がレンズ天体となるときにしばしば採用される球対称質量モデルである. 圧力を与える速度分散が半径によらず一定であることから等温と呼ばれ, 原点で密度分布が発散することから特異と呼ばれる. 具体的には, 速度分散 σ^2 を用いて, 動径質量密度分布が

$$\rho(r) = \frac{\sigma^2}{2\pi G r^2} \quad (3.3.14)$$

と与えられる. 収束場を計算すると

$$\kappa(\theta) = \frac{2\sigma^2}{c^2} \frac{D_{\text{ol}} D_{\text{ls}}}{D_{\text{os}}} \int_{-\infty}^{\infty} dZ \frac{1}{Z^2 + D_{\text{ol}}^2 \theta^2} = \frac{2\pi\sigma^2}{c^2} \frac{D_{\text{ls}}}{D_{\text{os}}} \frac{1}{\theta} \quad (3.3.15)$$

となるため, Einstein 半径は

$$\theta_{\text{Ein}} = \frac{4\pi\sigma^2}{c^2} \frac{D_{\text{ls}}}{D_{\text{os}}} \quad (3.3.16)$$

となり, Einstein 半径を用いて収束場と平均収束場を

$$\kappa(\theta) = \frac{\theta_{\text{Ein}}}{2\theta} \quad (3.3.17)$$

$$\bar{\kappa}(<\theta) = \frac{\theta_{\text{Ein}}}{\theta} \quad (3.3.18)$$

3.3 球対称レンズの具体例

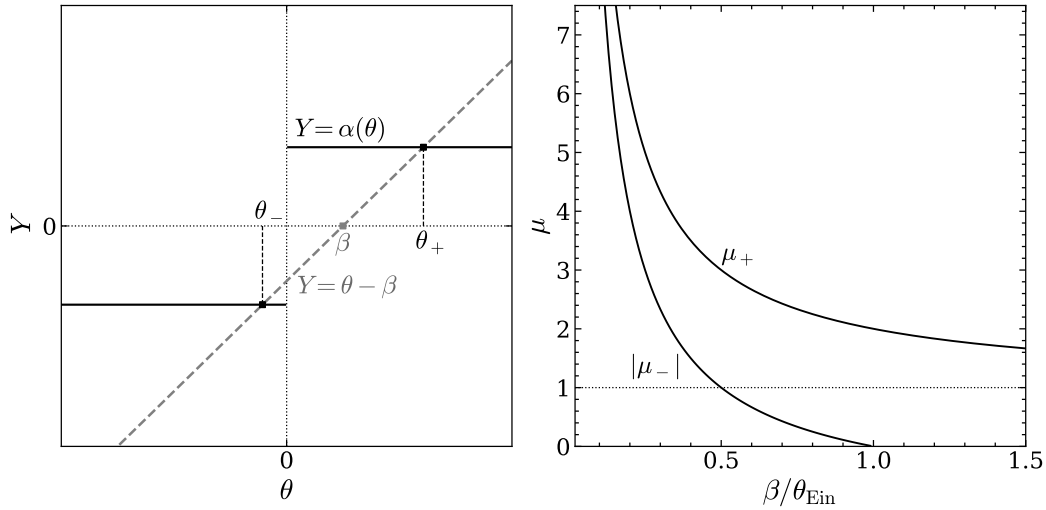


図 3.4 特異等温球の重力レンズ方程式の図形的考察 (左), および光源の位置 β とそれぞれの像の増光率との関係 (右).

と表すことができる. これらの結果から, 式 (3.1.16) より接線歪み場を

$$\gamma_+(\theta) = \frac{\theta_{\text{Ein}}}{2\theta} \quad (3.3.19)$$

と計算でき, 収束場と接線歪み場が一致することがわかる.

式 (3.1.6) に従って重力レンズポテンシャルを計算すると

$$\psi(\theta) = \theta_{\text{Ein}}\theta \quad (3.3.20)$$

となるため, 曲がり角は

$$\alpha(\theta) = \theta_{\text{Ein}} \quad (3.3.21)$$

と定数になる. θ の大きい極限でも $\alpha(\theta)$ がゼロに漸近しないのは一見すると不思議だが, これは式 (3.3.14) から計算される, 特異等温球の半径 r の 3 次元球内の全質量が $M(<r) \propto r$ と r に比例するため, $r \rightarrow \infty$ で $M(<r) \rightarrow \infty$ と発散することに由来する. 全質量が発散するため, 特異等温球は物理的に整合的な質量モデルではないが, 例えば銀河の中心部分の質量密度分布の近似モデルとしては, 観測と比較的よく一致していることもあり, 依然として有用である.

特異等温球の重力レンズ方程式は, 式 (3.2.4) に従って $\theta < 0$ に拡張すると

$$\beta = \theta - \theta_{\text{Ein}} \frac{\theta}{|\theta|} \quad (3.3.22)$$

と書ける. 図 3.4 左の図形的考察により, この重力レンズ方程式は, $\beta < \theta_{\text{Ein}}$ の時に 2 個, $\beta > \theta_{\text{Ein}}$ の時に 1 個の解を持つことがわかる. 式 (3.3.8) と同様に, $y := \beta/\theta_{\text{Ein}}$ とおくと, $y < 1$ の場合の複数像の位置 θ_{\pm} は, 複合同順として

$$\frac{\theta_{\pm}}{\theta_{\text{Ein}}} = y \pm 1 \quad (3.3.23)$$

となる．ここから直ちに，天球面上の2個の複数像の間の距離に対して

$$\theta_+ - \theta_- = 2\theta_{\text{Ein}} \quad (3.3.24)$$

が成り立つことがわかるので，複数像の位置の観測によって Einstein 半径が測定できることになる．また，それぞれの像の増光率は，式 (3.1.17) より

$$\mu_{\pm} = \left(1 - \frac{\theta_{\text{Ein}}}{|\theta_{\pm}|}\right)^{-1} = 1 \pm \frac{1}{y} \quad (3.3.25)$$

である．図 3.4 より，光源の位置 β を増やしていくと， θ_- に対応する複数像が原点に近づいていき，また増光率も 0 に近づいていって， $\beta = \theta_{\text{Ein}}$ でその複数像が消えることがわかる．原点が特異的なので，特異等温球の場合は像の増減は 1 個のみで，像平面の原点で起こる．全増光率は

$$\mu_{\text{tot}} = |\mu_+| + |\mu_-| = \frac{2}{y} \quad (3.3.26)$$

で与えられる．

時間の遅れは，式 (2.6.17) から，点質量レンズの場合と同様に重力レンズポテンシャルの符号に注意して，それぞれの複数像について

$$\Delta t(\theta_{\pm}; \beta) = \frac{1+z_1}{c} \frac{D_{\text{ol}}D_{\text{os}}}{D_{\text{ls}}} \theta_{\text{Ein}}^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{|\theta_{\pm}|}{\theta_{\text{Ein}}}\right) \quad (3.3.27)$$

と計算できる．観測可能な 2 個の複数像の間の時間の遅れを計算し，規格化された光源の位置 y の関数として書き表すと

$$\Delta t(\theta_-; \beta) - \Delta t(\theta_+; \beta) = 2 \frac{1+z_1}{c} \frac{D_{\text{ol}}D_{\text{os}}}{D_{\text{ls}}} \theta_{\text{Ein}}^2 y = 2 \frac{1+z_1}{c} \frac{D_{\text{ol}}D_{\text{ls}}}{D_{\text{os}}} \left(\frac{4\pi\sigma^2}{c^2}\right)^2 y \quad (3.3.28)$$

となり，点質量レンズの場合と同様に， θ_+ に先に光が到達すること，および時間の遅れが y の増加関数であることがわかる．さらに，式 (3.3.23) から得られる以下の関係式

$$\frac{\theta_+^2 - \theta_-^2}{2} = 2\theta_{\text{Ein}}^2 y \quad (3.3.29)$$

を用いることで，式 (3.3.28) は

$$\Delta t(\theta_-; \beta) - \Delta t(\theta_+; \beta) = \frac{1+z_1}{c} \frac{D_{\text{ol}}D_{\text{os}}}{D_{\text{ls}}} \frac{\theta_+^2 - \theta_-^2}{2} \quad (3.3.30)$$

と，観測される複数像の位置 θ_{\pm} を用いた簡潔な形でも表すことができる．

3.3.3 コア等温球

コア等温球は，式 (3.3.14) の質量密度分布で定義される特異等温球の中心に密度一定となるコアを導入し，原点の特異性を取り除いた質量モデルである．具体的には，コア等温球の質量密度分布は

$$\rho(r) = \frac{\sigma^2}{2\pi G} \frac{1}{r^2 + r_c^2} \quad (3.3.31)$$

3.3 球対称レンズの具体例

で与えられる。Einstein 半径は、以下で具体的に示すように、式 (3.3.16) で与えられる特異等温球の場合の Einstein 半径とは異なるが、式 (3.3.16) は角度スケールの基準として依然として有用なので

$$\theta_0 := \frac{4\pi\sigma^2}{c^2} \frac{D_{ls}}{D_{os}} \quad (3.3.32)$$

と定義しておき、またコア半径 r_c を見込む角度を

$$\theta_c := \frac{r_c}{D_{ol}} \quad (3.3.33)$$

と定義する。以下略。

3.3.4 Navarro-Frenk-White (NFW) モデル

NFW モデルは、Navarro, Frenk, White によって提唱 [7] された、 N 体シミュレーション (N -body simulation) で得られたダークマターハローの質量密度分布を表すモデルである。より具体的には、ある典型的な半径 r_s と密度 ρ_s を用いて、質量密度分布が

$$\rho(r) = \frac{\rho_s}{(r/r_s)(1+r/r_s)^2} \quad (3.3.34)$$

で与えられるモデルである。ダークマターハローの質量を M 、半径を r_Δ とおくと、質量と質量密度に対する以下の関係

$$M = \frac{4\pi}{3} r_\Delta^3 \Delta(z) \bar{\rho}_m(z) = \int_0^{r_\Delta} dr \rho(r) 4\pi r^2 \quad (3.3.35)$$

から ρ_s と r_s が決まる。ただし $\Delta(z)$ は非線形密度超過であり、球対称崩壊モデルから計算される値 [8] や、宇宙の臨界質量密度の 200 倍などの値が典型的に採用される。 $\bar{\rho}_m(z)$ は赤方偏移 z における宇宙の平均質量密度である。NFW モデルの計算では、 r_s の代わりに以下の中心集中度パラメータ

$$c_\Delta := \frac{r_\Delta}{r_s} \quad (3.3.36)$$

がよくパラメータとして採用されるが、このとき ρ_s と r_s は、式 (3.3.35) より

$$\rho_s = \frac{\Delta(z) \bar{\rho}_m(z) c_\Delta^3}{3m_{\text{NFW}}(c_\Delta)} \quad (3.3.37)$$

$$r_s = \frac{r_\Delta}{c_\Delta} = \left[\frac{3M}{4\pi\Delta(z)\bar{\rho}_m(z)} \right]^{1/3} \frac{1}{c_\Delta} \quad (3.3.38)$$

と表される。 $m_{\text{NFW}}(x)$ は

$$m_{\text{NFW}}(x) := \int_0^x dr \frac{r}{(1+r)^2} = \ln(1+x) - \frac{x}{1+x} \quad (3.3.39)$$

で定義される、NFW モデルにおける、ある半径内の球の内部の全質量の計算に必要な関数である。

第3章 重力レンズ方程式とその解の具体的な例

球対称 NFW モデルの重力レンズ計算の利点は、曲がり角などが解析的に計算できる点である [9, 10]. 以下では導出を省略し、結果のみを示すことにすると、まず重力レンズポテンシャルについて

$$\psi(\theta) = \frac{2\rho_s r_s}{\Sigma_{\text{cr}}} \theta_s^2 \left[(x^2 - 1) F^2(x) + \ln^2 \left(\frac{x}{2} \right) \right] \quad (3.3.40)$$

となる. ただし

$$\theta_s := \frac{r_s}{D_{\text{ol}}} \quad (3.3.41)$$

$$x := \frac{\theta}{\theta_s} \quad (3.3.42)$$

であり, 関数 $F(x)$ は

$$F(x) := \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \operatorname{arctanh} \sqrt{1-x^2} & (x < 1) \\ \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \operatorname{arctan} \sqrt{x^2-1} & (x > 1) \end{cases} \quad (3.3.43)$$

で定義される. 曲がり角は

$$\alpha(\theta) = \frac{4\rho_s r_s}{\Sigma_{\text{cr}}} \frac{\theta_s}{x} \left[F(x) + \ln \left(\frac{x}{2} \right) \right] \quad (3.3.44)$$

となり, 収束場と平均収束場はそれぞれ

$$\kappa(\theta) = \frac{2\rho_s r_s}{\Sigma_{\text{cr}}} \frac{1}{(x^2 - 1)} [1 - F(x)] \quad (3.3.45)$$

$$\bar{\kappa}(< \theta) = \frac{4\rho_s r_s}{\Sigma_{\text{cr}}} \frac{1}{x^2} \left[F(x) + \ln \left(\frac{x}{2} \right) \right] \quad (3.3.46)$$

となる. これらから接線歪み場も式 (3.1.16) によって計算できるが, 具体的な表式はここでは省略する. 図形的考察により, 複数像の個数は 1 個または 3 個となることがわかる.

3.3.5 冪分布レンズ

レンズ天体の動径質量密度分布の依存性を調べる上で有用となる質量モデルが, 球対称の冪分布レンズなので紹介しておく. 具体的には, 冪のパラメータを η として, 質量密度分布が

$$\rho(r) \propto r^{-\eta} \quad (3.3.47)$$

で与えられる質量モデルである. $\eta = 2$ が 3.3.2 節で紹介した特異等温球に対応している. 収束場は質量密度分布を視線方向に沿って積分して得られるので, $\kappa \propto \theta^{1-\eta}$ となると考えられる. 以下では, 収束場が中心集中した $\eta > 1$ の場合のみを考える. 式 (3.1.18) の平均収束場と Einstein 半径との関係から, 平均収束場が

$$\bar{\kappa}(< \theta) = \left(\frac{\theta}{\theta_{\text{Ein}}} \right)^{1-\eta} \quad (3.3.48)$$

と書き表せることがわかるので, 曲がり角は

$$\alpha(\theta) = \theta_{\text{Ein}} \left(\frac{\theta}{\theta_{\text{Ein}}} \right)^{2-\eta} \quad (3.3.49)$$

3.4 非球対称レンズ

となり、収束場は

$$\kappa(\theta) = \frac{3-\eta}{2} \left(\frac{\theta}{\theta_{\text{Ein}}} \right)^{1-\eta} \quad (3.3.50)$$

となることからわかる。式 (3.1.16) から、接線歪み場は

$$\gamma_+(\theta) = \frac{\eta-1}{2} \left(\frac{\theta}{\theta_{\text{Ein}}} \right)^{1-\eta} \quad (3.3.51)$$

となって、 $\eta > 1$ のとき確かに円の接線方向に像が歪むことがわかる。重力レンズポテンシャルは、式 (3.3.49) を積分すればよく

$$\psi(\theta) = \frac{\theta_{\text{Ein}}^2}{3-\eta} \left(\frac{\theta}{\theta_{\text{Ein}}} \right)^{3-\eta} \quad (3.3.52)$$

となる。

まず、像の個数を議論するために、式 (3.2.7) を用いて動径臨界曲線を考える。動径臨界曲線は

$$\mu_r^{-1} = 1 - 2\kappa + \bar{\kappa} = 1 - (2-\eta) \left(\frac{\theta}{\theta_{\text{Ein}}} \right)^{1-\eta} = 0 \quad (3.3.53)$$

を満たす半径 θ の円で与えられるので、動径臨界曲線が存在する条件は、明らかに $\eta < 2$ である。 $\eta < 2$ のとき複数像が最大 3 個生成され、一方 $\eta \geq 2$ のときは複数像は 2 個まで生成される。

3.4 非球対称レンズ

これまで球対称の質量モデルを考えてきたが、詳細な重力レンズ解析を行う際には、レンズ天体の非球対称性を考慮することが必須である。非球対称性は、以下で具体的に見ていくように、複数像の個数を変えるなど、強い重力レンズにおいて特に大きな影響を及ぼす。ここでは、非球対称性を生む要因の 1 つとなる、レンズ天体近傍の他の天体等からの外部摂動の影響を議論する。

$$\psi_{\text{ext}}(\boldsymbol{\theta}) := \psi_X(\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}_0) \simeq \psi_X(-\boldsymbol{\theta}_0) + \boldsymbol{\theta} \cdot \left. \frac{\partial \psi_X}{\partial \boldsymbol{\theta}} \right|_{-\boldsymbol{\theta}_0} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\theta} \cdot H(\psi_X(-\boldsymbol{\theta}_0)) \boldsymbol{\theta} + \dots \quad (3.4.1)$$

となる。ただし $H(\psi_X)$ は Hesse 行列である。式 (3.4.1) の右辺の第 1 項は定数で意味がなく、第 2 項は曲がり角一定の項なので、その影響は光源の位置の平行移動に完全に押し込めることができる。したがって、物理的に意味のある影響は、右辺第 3 項以降から生じる。重力レンズポテンシャル ψ_X から計算される収束場 κ_X および歪み場 γ_{X1} , γ_{X2} に対して

$$\kappa_X(-\boldsymbol{\theta}_0) =: \kappa_{\text{ext}} \quad (3.4.2)$$

$$\gamma_{X1}(-\boldsymbol{\theta}_0) =: -\gamma_{\text{ext}} \cos 2\varphi_0 \quad (3.4.3)$$

$$\gamma_{X2}(-\boldsymbol{\theta}_0) =: -\gamma_{\text{ext}} \sin 2\varphi_0 \quad (3.4.4)$$

第3章 重力レンズ方程式とその解の具体的な例

によって、定数の収束場 κ_{ext} と歪み場 γ_{ext} を定義すると、式 (3.4.1) の右辺第3項は、 $\boldsymbol{\theta} = (\theta \cos \varphi, \theta \sin \varphi)$ の極座標表示で

$$\psi_{\text{ext}}(\boldsymbol{\theta}) \simeq \frac{\theta^2}{2} [\kappa_{\text{ext}} - \gamma_{\text{ext}} \cos 2(\varphi - \varphi_0)] \quad (3.4.5)$$

と書き表すことができるので、 κ_{ext} と γ_{ext} が外部摂動の実質的な最低次の寄与として入ることがわかる [11]. κ_{ext} と γ_{ext} は、それぞれ外部収束場と外部歪み場と呼ばれる。 φ_0 が摂動を起こす天体の方向に対応する方位角を表していて、外部摂動の歪み場が確かに球対称性をやぶることが見てとれる。外部摂動の影響が大きい場合、より高次の摂動も無視できなくなるので注意が必要である。

外部摂動に起因する非球対称な重力レンズの簡単な例として、特異等温球に外部歪み場がある場合を考えよう。一般性を失うことなく外部構造が θ_2 軸上にあると仮定する、すなわち $\varphi_0 = \pi/2$ と選ぶことができ、このとき重力レンズポテンシャルは、極座標とデカルト座標の両方で表記して

$$\psi(\boldsymbol{\theta}) = \theta_{\text{Ein}} \theta + \frac{\gamma_{\text{ext}}}{2} \theta^2 \cos 2\varphi = \theta_{\text{Ein}} \sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2} + \frac{\gamma_{\text{ext}}}{2} (\theta_1^2 - \theta_2^2) \quad (3.4.6)$$

となる。これより、重力レンズ方程式は

$$\beta_1 = [(1 - \gamma_{\text{ext}}) \theta - \theta_{\text{Ein}}] \cos \varphi = (1 - \gamma_{\text{ext}}) \theta_1 - \frac{\theta_{\text{Ein}} \theta_1}{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2}} \quad (3.4.7)$$

$$\beta_2 = [(1 + \gamma_{\text{ext}}) \theta - \theta_{\text{Ein}}] \sin \varphi = (1 + \gamma_{\text{ext}}) \theta_2 - \frac{\theta_{\text{Ein}} \theta_2}{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2}} \quad (3.4.8)$$

の2つの方程式となる。この方程式の一般解は、簡単な形では書き表せないが、複数像の配置や個数については、臨界曲線や焦線を調べることで定性的な理解が可能である。臨界曲線を求めるために、増光率の逆数を式 (2.4.1) に従って計算すると、極座標で表記して

$$\mu^{-1} = 1 - \gamma_{\text{ext}}^2 - \frac{\theta_{\text{Ein}}}{\theta} (1 - \gamma_{\text{ext}} \cos 2\varphi) \quad (3.4.9)$$

となるので、 $\mu^{-1} = 0$ を解くことで、臨界曲線の媒介変数表示を

$$\theta(\varphi) = \frac{1 - \gamma_{\text{ext}} \cos 2\varphi}{1 - \gamma_{\text{ext}}^2} \theta_{\text{Ein}} \quad (3.4.10)$$

と得ることができる。ここから、臨界曲線の長軸が外部摂動の方向を向くことがわかる。この結果を重力レンズ方程式 (3.4.7) および (3.4.8) に代入することで、焦線がアステロイド曲線

$$\beta_1(\varphi) = -\frac{2\gamma_{\text{ext}}}{1 + \gamma_{\text{ext}}} \theta_{\text{Ein}} \cos^3 \varphi \quad (3.4.11)$$

$$\beta_2(\varphi) = \frac{2\gamma_{\text{ext}}}{1 - \gamma_{\text{ext}}} \theta_{\text{Ein}} \sin^3 \varphi \quad (3.4.12)$$

となることが示せる。さらに、特異になっている $\theta = 0$ に対応する光源平面の曲線は、半径 θ_{Ein} の円であり、これがもう1つの焦線となる。

非球対称性を持つ質量モデルとしてよく採用される他のモデルが、球対称性を持つさまざまな質量モデルを楕円分布に拡張したモデルである。銀河や銀河団の実際の形状を観測すると、天球面上

3.5 質量-薄板縮退

で円形ではなくどちらかといえば楕円の形状を有しているため、その意味でもより現実的な質量モデルと言える。

楕円質量面密度分布を持つ質量モデルは、球対称レンズに対して質量面密度分布ないし収束場の等密度線を円から楕円に変更することで得られる。より具体的には、球対称モデルの収束場 $\kappa(\theta)$ に対して、 θ を以下で定義される v に置き換える

$$\kappa(\theta): \quad \theta \rightarrow v := \sqrt{\frac{\theta_1^2}{(1-e)} + (1-e)\theta_2^2} \quad (3.4.13)$$

ことによって、 θ_2 軸方向に伸びた楕円分布を持つ収束場 $\kappa(v)$ が得られる。さらに座標系を回転させることで、長軸が任意の向きの楕円分布を持つ収束場を得ることができる。楕円率 (あるいは扁平率) e は、ここでは楕円の短軸と長軸の比が $1-e$ となる量として定義されている。

上記の手続きによって楕円分布を持つ収束場 $\kappa(v)$ が得られれば、式 (2.1.3) や (2.1.2) によって、重力レンズポテンシャルや曲がり角を計算できるが、これらの積分は多くの場合解析的に解けず、数値積分が必要となる。数値積分を行う場合、実際には式 (2.1.3) や (2.1.2) の 2 次元積分を直接行う必要はなく、楕円対称性を利用することで、楕円質量面密度分布の重力レンズポテンシャル、曲がり角、歪み場などは、球対称レンズの曲がり角や収束場を用いた 1 次元積分の形で書かれることが知られている [12]。

ここでは、解析的に計算できる楕円質量モデルの数少ない例の 1 つとして、3.3.2 節と 3.3.3 節で考えた特異等温球およびコア等温球を楕円分布に拡張した、特異等温楕円体およびコア等温楕円体が知られている。コア等温楕円体の収束場は、コア等温球の収束場を、式 (3.4.13) に基づいて楕円分布に拡張することで

$$\kappa(\theta) = \frac{\theta_0}{2\sqrt{v^2 + \theta_c^2}} \quad (3.4.14)$$

と得られる。重力レンズポテンシャルおよびその微分が解析的に得られることが知られているが [13, 14]、ここでは省略する。

3.5 質量-薄板縮退

式 (3.4.5) に含まれるもう 1 つの項、外部収束場 κ_{ext} の影響についてここで議論しておく。一般的な質量レンズによる曲がり角 $\alpha(\theta)$ に対して、外部収束場の摂動を加えると、重力レンズ方程式 (2.1.1) は

$$\beta = \theta - \alpha(\theta) - \kappa_{\text{ext}}\theta \quad (3.5.1)$$

と変更を受ける。この式を書き換えると

$$(1 - \kappa_{\text{ext}})^{-1}\beta = \theta - (1 - \kappa_{\text{ext}})^{-1}\alpha(\theta) \quad (3.5.2)$$

となるので、観測できない光源の位置を $(1 - \kappa_{\text{ext}})$ 倍ずらし、元の曲がり角 $\alpha(\theta)$ も $(1 - \kappa_{\text{ext}})$ 倍変換することで、外部収束場の摂動の影響を見かけ上打ち消して、観測される複数像の位置を不変に

保つことができることを意味している。言い換えると、一般の単一レンズ平面の重力レンズ方程式において、直接観測できない重力レンズポテンシャル ψ と光源位置 β に対する以下の質量-薄板変換

$$\psi(\boldsymbol{\theta}) \rightarrow (1 - \kappa_{\text{ext}})\psi(\boldsymbol{\theta}) + \kappa_{\text{ext}} \frac{|\boldsymbol{\theta}|^2}{2} \quad (3.5.3)$$

$$\boldsymbol{\beta} \rightarrow (1 - \kappa_{\text{ext}})\boldsymbol{\beta} \quad (3.5.4)$$

によって、観測量である像の位置は不変に保たれる。この縮退は質量-薄板縮退と呼ばれ、特に強い重力レンズ解析における不定性の一因となっている [15]。式 (3.5.3) の変換は、 $\kappa_{\text{ext}} > 0$ とすると、実効的に質量分布の中心集中度を下げる変換であるため、質量-薄板縮退の存在は、重力レンズ現象の観測から動径密度分布、例えば 3.3.5 節で考えた冪分布レンズの冪、を決めることが容易ではないことを示唆する。

質量-薄板縮退が、重力レンズ像の位置以外の性質にどのような影響を与えるかも見ておこう。まず、式 (3.5.3) の質量-薄板変換によって、式 (2.3.2) の Jacobi 行列が $(1 - \kappa_{\text{ext}})$ 倍されるため、式 (2.4.1) で定義される増光率は

$$\mu \rightarrow (1 - \kappa_{\text{ext}})^{-2}\mu \quad (3.5.5)$$

と変換される。薄板を挿入することで、実効的に質量分布の中心集中度を下げるため、3.3.5 節の議論に従って増光率は増加する。しかし、銀河やクエーサーなどの通常の光源の場合、重力レンズ増光前の元々の光源の明るさがわからないため、増光率は直接の観測量ではない。複数像の増光率の比については、観測された複数像の見かけの明るさの比から観測可能なので、観測量となるが、式 (3.5.5) の変換が全ての複数像に適用されるため、質量-薄板変換によって、増光率の比は不変に保たれる。したがって、複数像の見かけの明るさの比の観測によって、質量-薄板縮退をやぶることはできない。例外的な状況として、光源が Ia 型超新星爆発のような標準光源で、重力レンズ増光前の元々の光源の明るさが推定できる場合、質量-薄板縮退をやぶることができる。

次に、時間の遅れに対する影響を考える。式 (2.6.17) の右辺の前係数を除いた部分について、質量-薄板変換によって

$$\frac{|\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\beta}|^2}{2} - \psi(\boldsymbol{\theta}) \rightarrow (1 - \kappa_{\text{ext}}) \left[\frac{|\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\beta}|^2}{2} - \psi(\boldsymbol{\theta}) \right] - \kappa_{\text{ext}}(1 - \kappa_{\text{ext}}) \frac{|\boldsymbol{\beta}|^2}{2} \quad (3.5.6)$$

と複雑な形で変換される。ただし、実際に観測可能な時間の遅れは、式 (2.6.18) で表される複数像の間の時間の遅れである。同じ光源の複数像に対しては、光源の位置 $\boldsymbol{\beta}$ は共通のため、式 (3.5.6) の右辺第 2 項は観測される時間の遅れには寄与せず、結局 $\boldsymbol{\theta}_A$ と $\boldsymbol{\theta}_B$ の位置の複数像の間の時間の遅れが、質量-薄板変換によって

$$\Delta t_{AB} \rightarrow (1 - \kappa_{\text{ext}})\Delta t_{AB} \quad (3.5.7)$$

と変換されることがわかる。したがって、もし角径距離の比で表される、時間の遅れの前係数が既知だとすると、時間の遅れの観測によって質量-薄板縮退をやぶることができるが、多くの状況では、むしろ時間の遅れの観測によって角径距離ないし Hubble 定数を測定することになり、その場合は質量-薄板縮退は測定の実験的誤差の大きな要因の 1 つとなる。

参考文献

- [1] Jain, B., Khoury, J. Cosmological tests of gravity. *Annals of Physics*, **325**, 1479-1516, 2010.
- [2] Futamase, T. On the Validity of the Cosmological Lens Equation in General Relativity. *Progress of Theoretical Physics*, **93**, 647-652, 1995.
- [3] Born, M. Quantenmechanik der Stoßvorgänge. *Zeitschrift für Physik*, **38**, 803-827, 1926.
- [4] Schneider, P. A new formulation of gravitational lens theory, time-delay, and Fermat's principle. *Astronomy and Astrophysics*, **143**, 413-420, 1985.
- [5] Melchior, P., et al. First measurement of gravitational lensing by cosmic voids in SDSS. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, **440**, 2922-2927, 2014.
- [6] Young, P., et al. The double quasar Q0957+561 A, B: a gravitational lens image formed by a galaxy at $z=0.39$. *The Astrophysical Journal*, **241**, 507-520, 1980.
- [7] Navarro, J. F., Frenk, C. S., White, S. D. M. A Universal Density Profile from Hierarchical Clustering. *The Astrophysical Journal*, **490**, 493-508, 1997.
- [8] Nakamura, T. T., Suto, Y. Strong Gravitational Lensing and Velocity Function as Tools to Probe Cosmological Parameters — Current Constraints and Future Predictions —. *Progress of Theoretical Physics*, **97**, 49, 1997.
- [9] Bartelmann, M. Arcs from a universal dark-matter halo profile.. *Astronomy and Astrophysics*, **313**, 697-702, 1996.
- [10] Wright, C. O., Brainerd, T. G. Gravitational Lensing by NFW Halos. *The Astrophysical Journal*, **534**, 34-40, 2000.
- [11] Kochanek, C. S. The Implications of Lenses for Galaxy Structure. *The Astrophysical Journal*, **373**, 354, 1991.
- [12] Schramm, T. Realistic elliptical potential wells for gravitational lens models. *Astronomy and Astrophysics*, **231**, 19-24, 1990.
- [13] Kassiola, A., Kovner, I. Elliptic Mass Distributions versus Elliptic Potentials in Gravitational Lenses. *The Astrophysical Journal*, **417**, 450, 1993.
- [14] Kormann, R., Schneider, P., Bartelmann, M. Isothermal elliptical gravitational lens models.. *Astronomy and Astrophysics*, **284**, 285-299, 1994.
- [15] Falco, E. E., Gorenstein, M. V., Shapiro, I. I. On model-dependent bounds on H_0 from gravitational images : application to Q 0957+561 A, B.. *The Astrophysical Journal*, **289**, L1-L4, 1985.