

重力レンズの基礎と応用

大栗 真宗

(東京大 RESCEU/物理/Kavli IPMU)

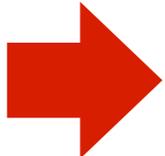
slides available at:

<http://www-utap.phys.s.u-tokyo.ac.jp/~oguri/lecture/2017yitp/>

2017/3/22-24 集中講義@京大基研

目次

1. イントロ+重力レンズの基礎

 2. 強い重力レンズ

3. 強い重力レンズの応用

(時間の遅れ、サブストラクチャ、遠方銀河)

4. 弱い重力レンズ

5. 弱い重力レンズの応用

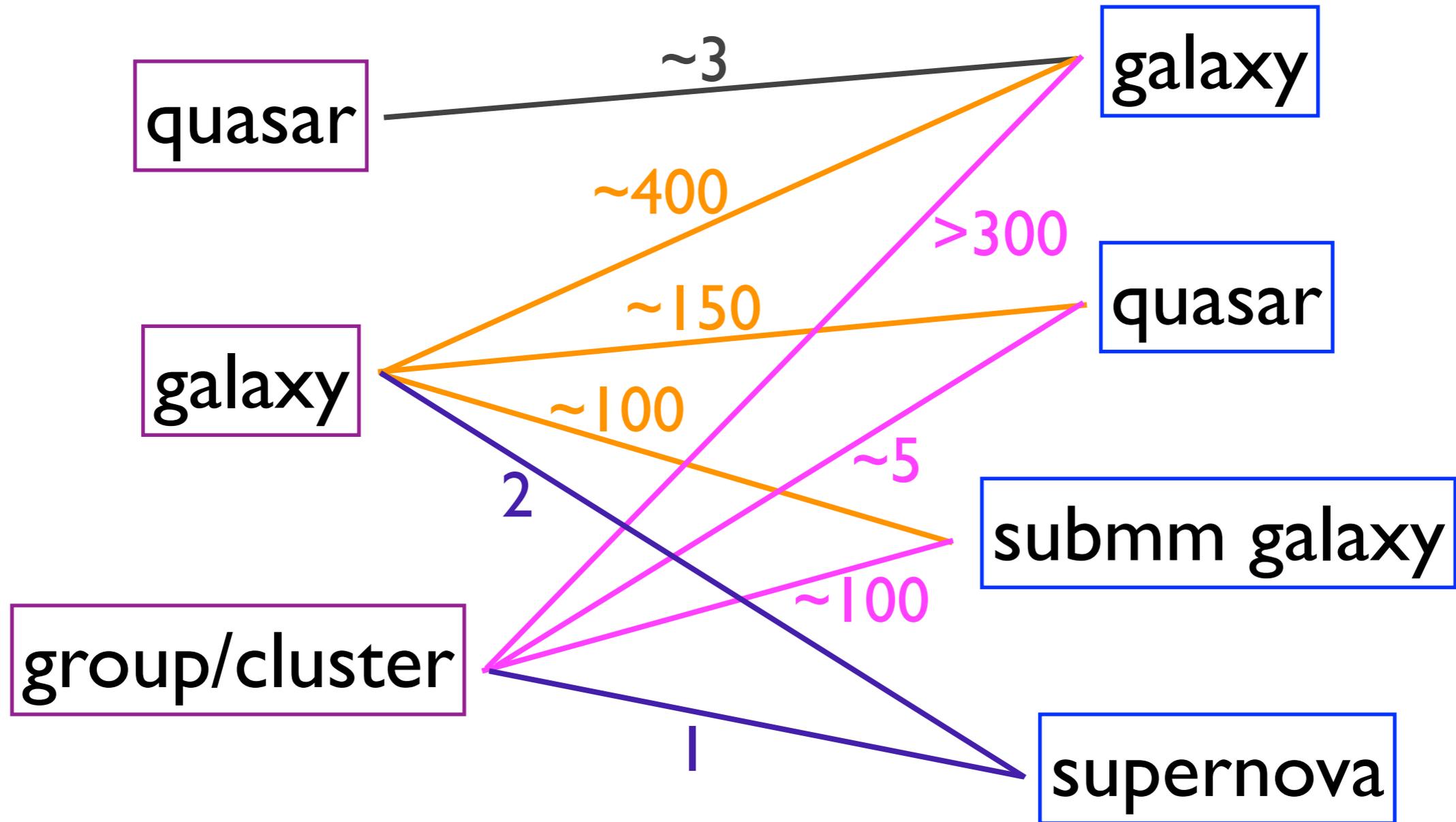
(銀河団質量分布、密度揺らぎ問題、HSCサーベイ)

「強い」 vs 「弱い」 重力レンズ

- 強い重力レンズ
 - 個々のソースで検出
 - $\kappa \gtrsim 1$ ($\Sigma \gtrsim \Sigma_{\text{cr}}$)、critical curve/caustic の近く
 - 複数像、大きな歪み、高い増光率
- 弱い重力レンズ
 - 多数のソースの統計処理で検出
 - $\kappa \ll 1$ ($\Sigma \ll \Sigma_{\text{cr}}$)、critical curve/caustic から遠い
 - 複数像なし、歪みや増光率は微小

(partly) based on Master Lens Database

様々な強い重力レンズ



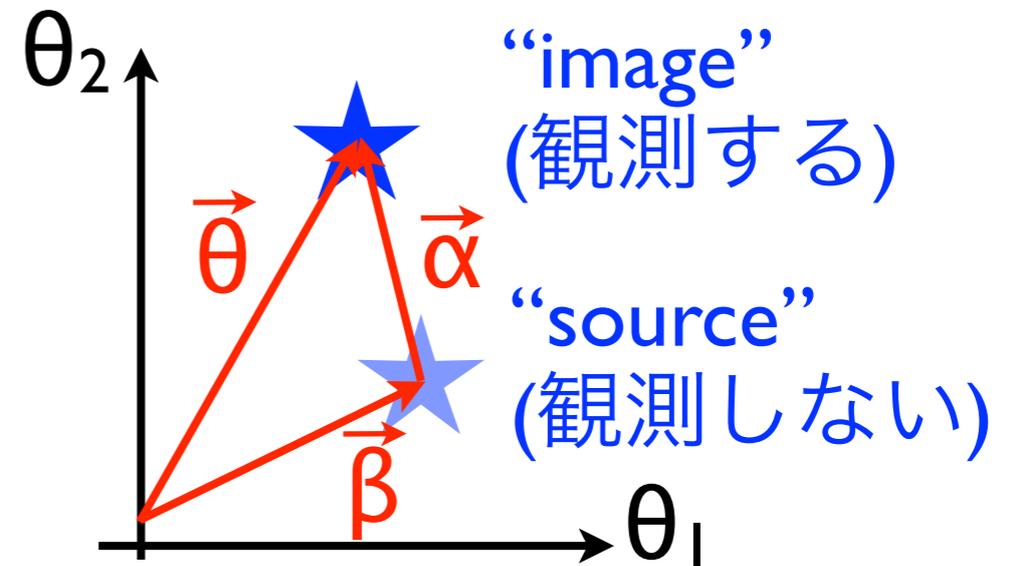
レンズ天体 (lens)

背景天体 (source)

強い重力レンズ解析の困難

- 重力レンズ方程式は $\vec{\theta}$ から $\vec{\beta}$ への写像

$$\vec{\beta} = \vec{\theta} - \vec{\alpha}(\vec{\theta})$$



- 解析の多くの場合 $\vec{\beta}$ から $\vec{\theta}$ を知りたいがそれは一般にはたいへん困難
 - レンズ方程式は $\vec{\theta}$ に関して非線形
 - 解は一意的ではない (複数像!)

強い重力レンズ解析

- 軸対称レンズ
- より現実的なモデル
- 数値的解法
- 強い重力レンズ系のモデリング

軸対称レンズ (I)

- 単純だが様々な解析に有用

$$\kappa(\vec{\theta}) = \kappa(\theta) \quad |\vec{\theta}| = \theta$$

レンズポテンシャル ψ は

$$\begin{aligned} \psi(\vec{\theta}) &= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty d\theta' \theta' \kappa(\theta') \int_0^{2\pi} d\phi \ln |\vec{\theta} - \vec{\theta}'| \\ &= 2 \int_0^\theta d\theta' \theta' \kappa(\theta') \ln \left(\frac{\theta}{\theta'} \right) \end{aligned}$$

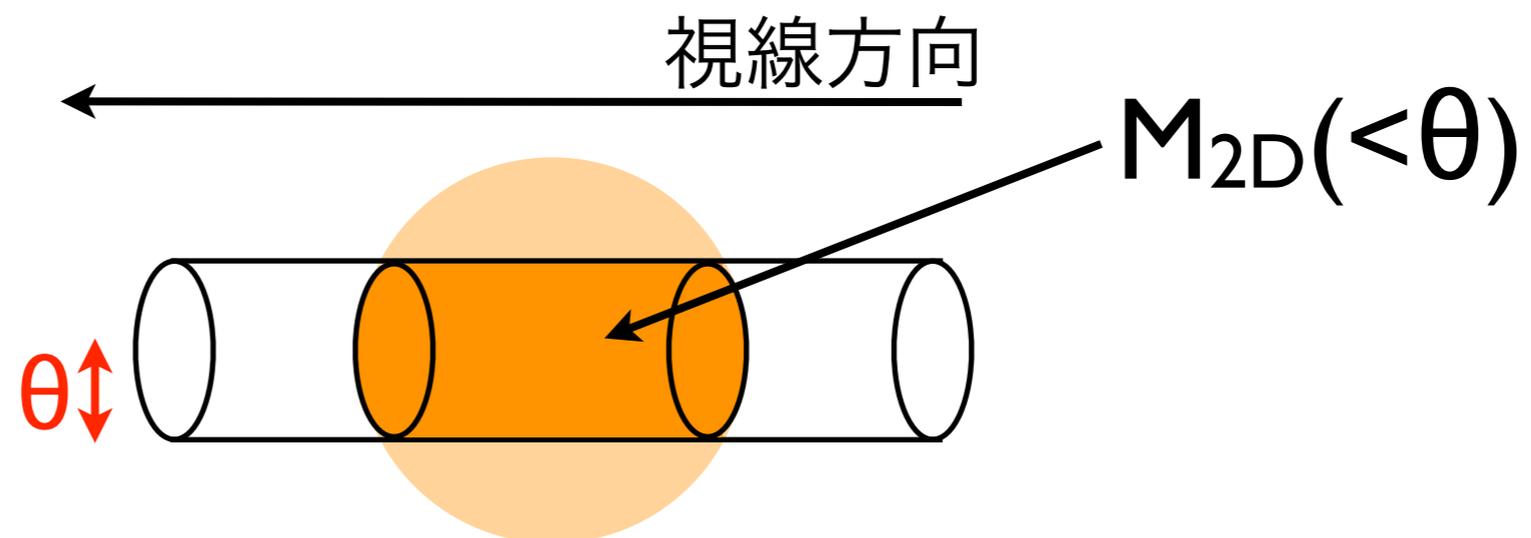
$$\rightarrow \psi(\vec{\theta}) = \psi(\theta)$$

軸対称レンズ (III)

- 従って重力レンズ方程式は以下の一次元の方程式に帰着する

$$\beta = \theta - \alpha(\theta) = [1 - \bar{\kappa}(<\theta)] \theta$$

注: $\bar{\kappa}(<\theta) = \frac{M_{2D}(<\theta)}{\pi\theta^2 D_A^2(z_l) \Sigma_{\text{cr}}}$



軸対称レンズ (IV)

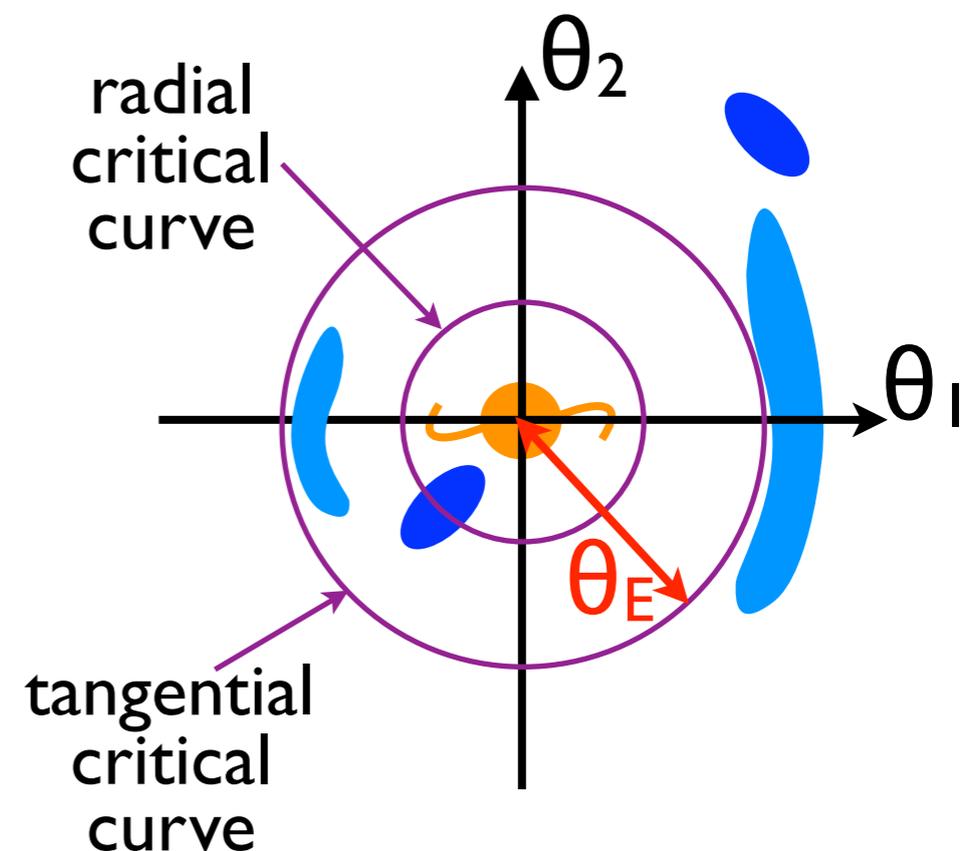
- 軸対称レンズの critical curves

$$\det A = (1 - \kappa)^2 - |\gamma|^2 = \underbrace{[1 - \bar{\kappa}(< \theta)]}_{\text{tangential critical curve}} \underbrace{[1 + \bar{\kappa}(< \theta) - 2\kappa(\theta)]}_{\text{radial critical curve}}$$

tangential critical curve は
 $\beta=0$ の解に対応

$$\bar{\kappa}(< \theta_E) = 1$$

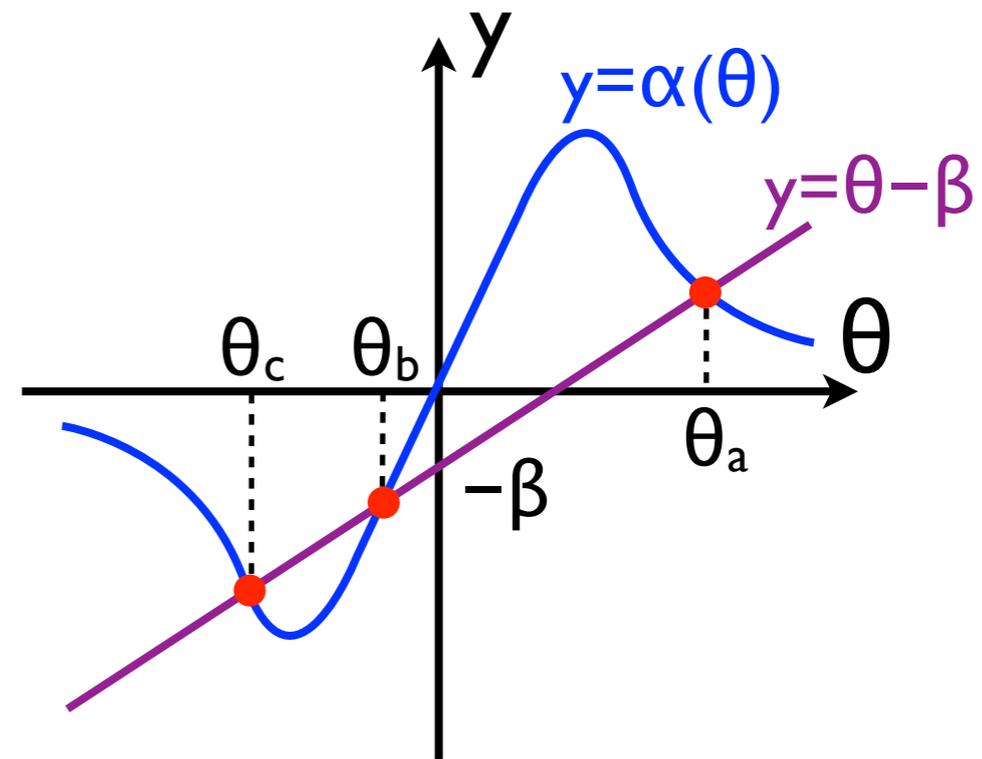
θ_E : アイんシュタイン半径



軸対称重力レンズ方程式の解

- 重力レンズ方程式は一次元方程式
- 解の振る舞いを調べる上で「図形的」手法が有用

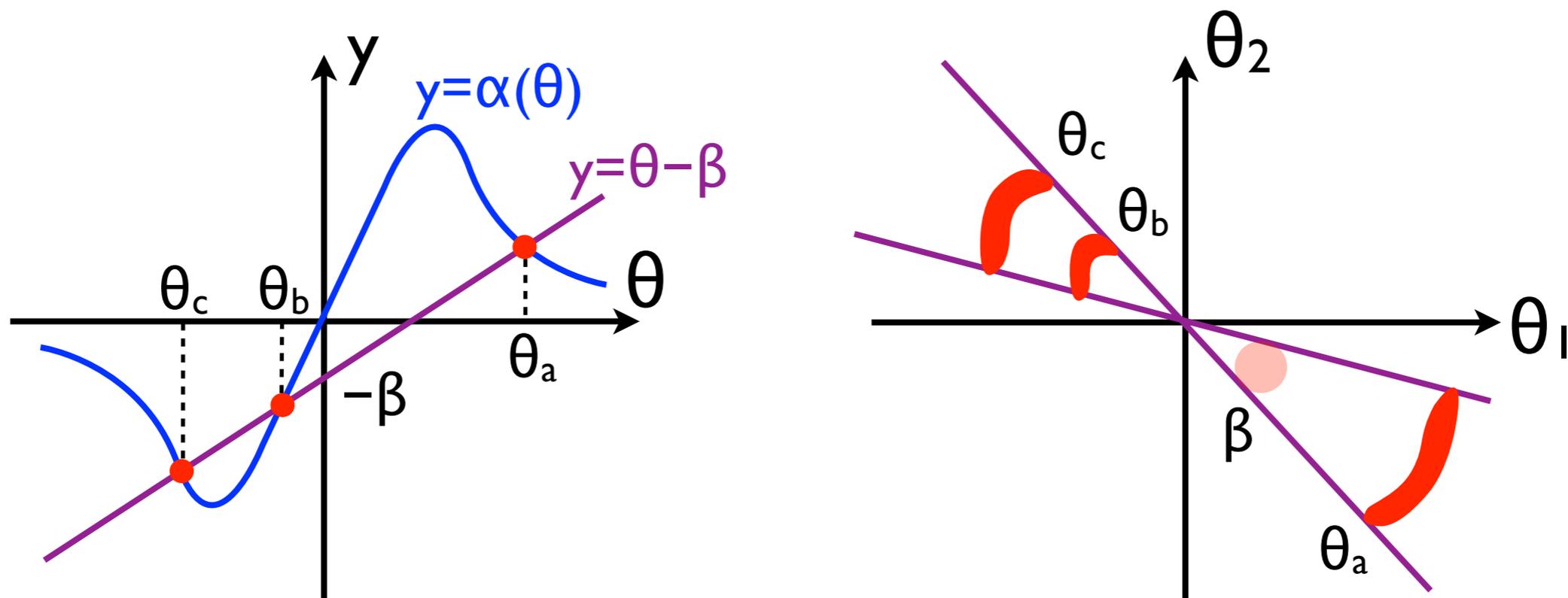
$$\beta = \theta - \alpha(\theta)$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \alpha(\theta) \\ y = \theta - \beta \end{cases}$$



解: $\theta_a, \theta_b, \theta_c$

広がったソースの場合

- 図形的な手法で理解可能



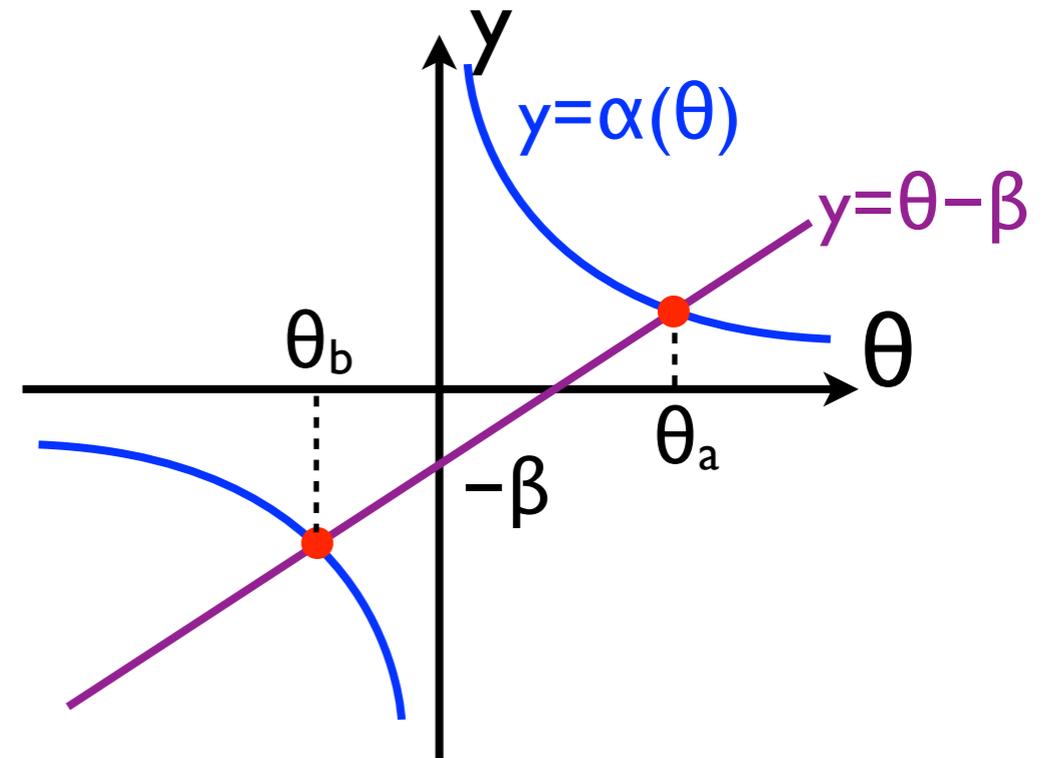
例I: 点源 (point mass)

- 星、BH、コンパクト銀河などの質量モデル

$$\bar{\kappa}(< \theta) = \frac{M}{\pi D_A^2(z_l) \Sigma_{\text{cr}}} \frac{1}{\theta^2} = \frac{\theta_E^2}{\theta^2}$$
$$\equiv \theta_E^2$$

$$\alpha(\theta) = \theta \bar{\kappa}(< \theta) \propto \frac{1}{\theta}$$

常に二つの像

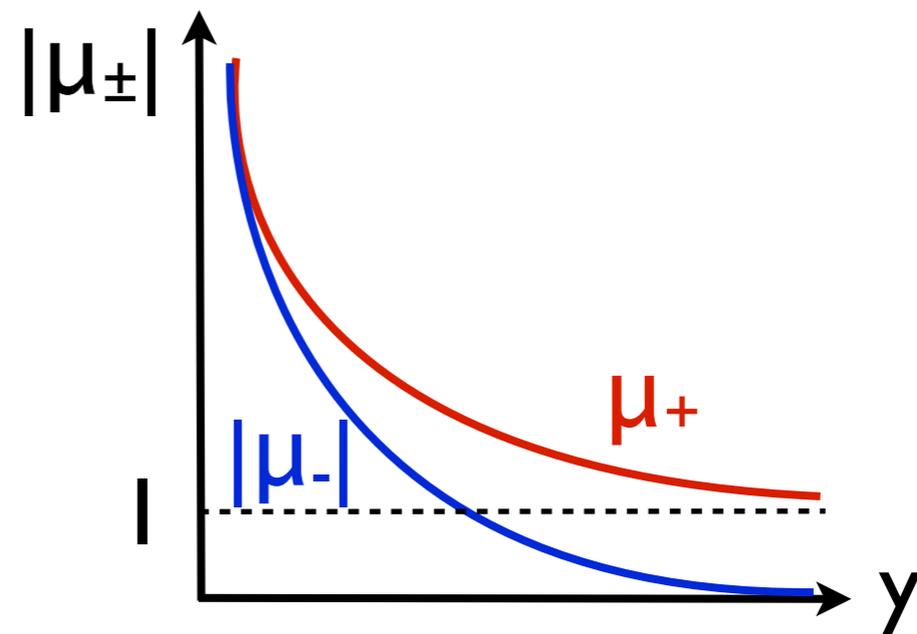
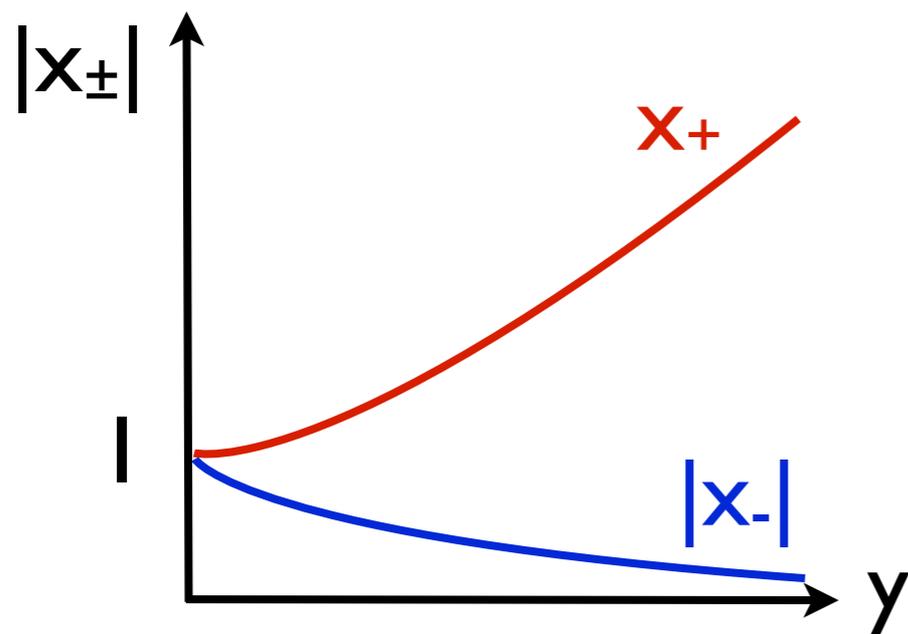


点源の場合の解と増光率

$$\frac{\beta}{\theta_E} = y \quad \frac{\theta}{\theta_E} = x \quad \text{とおくと}$$

レンズ方程式 $y = x - \frac{1}{x} \rightarrow x_{\pm} = \frac{y \pm \sqrt{y^2 + 4}}{2}$

増光率 $\mu_{\pm} = \frac{1}{2} \pm \frac{y^2 + 2}{2y\sqrt{y^2 + 4}}$



例2: 等温球 (singular isothermal sphere)

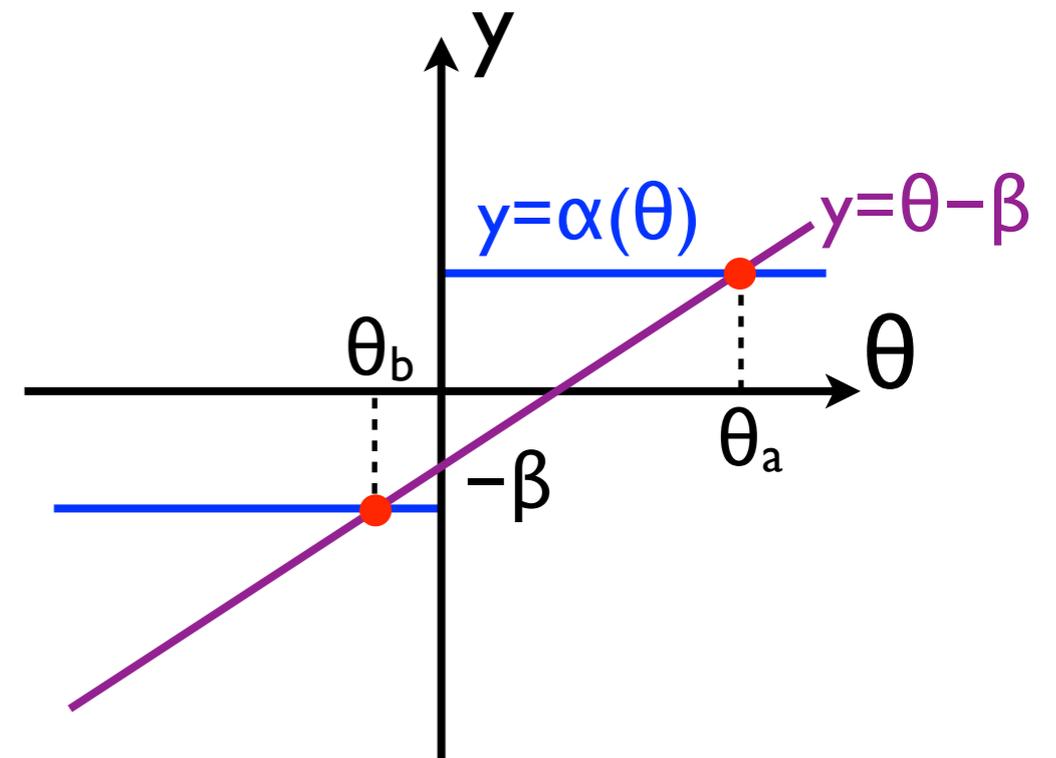
- 銀河の標準的な質量モデル

$$\rho(r) = \frac{\sigma^2}{2\pi G r^2} \quad \Sigma(x) = \frac{\sigma^2}{2\pi G} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz}{x^2 + z^2} = \frac{\sigma^2}{2GD_A(z_l)\theta}$$

$$\kappa(\theta) = 2\pi \left(\frac{\sigma}{c}\right)^2 \frac{D_A(z_l, z_s)}{D_A(z_s)} \frac{1}{\theta}$$

$$\bar{\kappa}(<\theta) = 4\pi \left(\frac{\sigma}{c}\right)^2 \frac{D_A(z_l, z_s)}{D_A(z_s)} \frac{1}{\theta} = \frac{\theta_E}{\theta}$$

$\equiv \theta_E$



$|\beta| < \theta_E$ の時二つの像

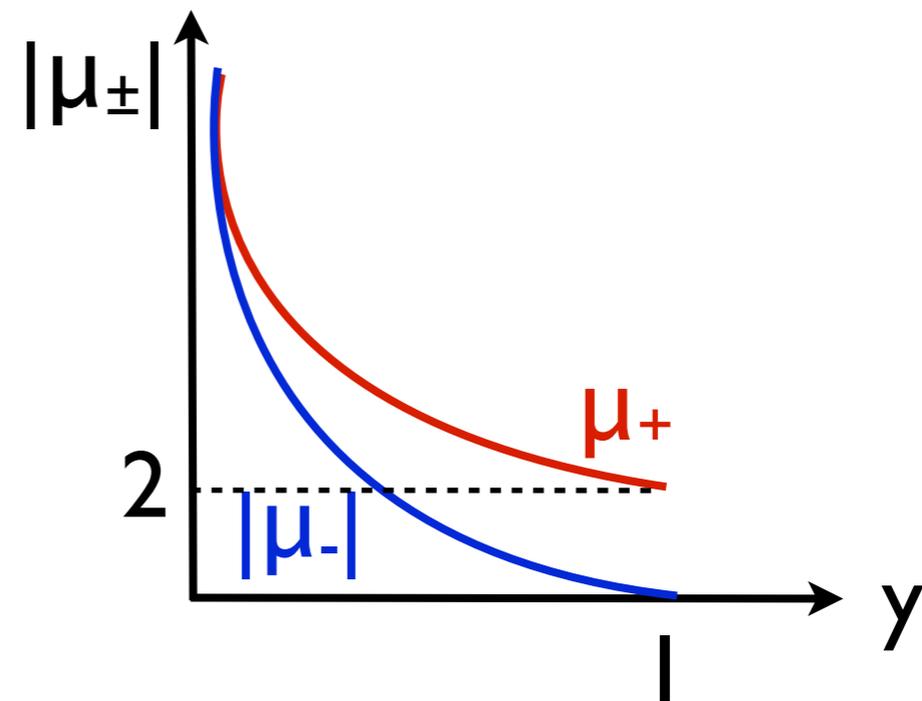
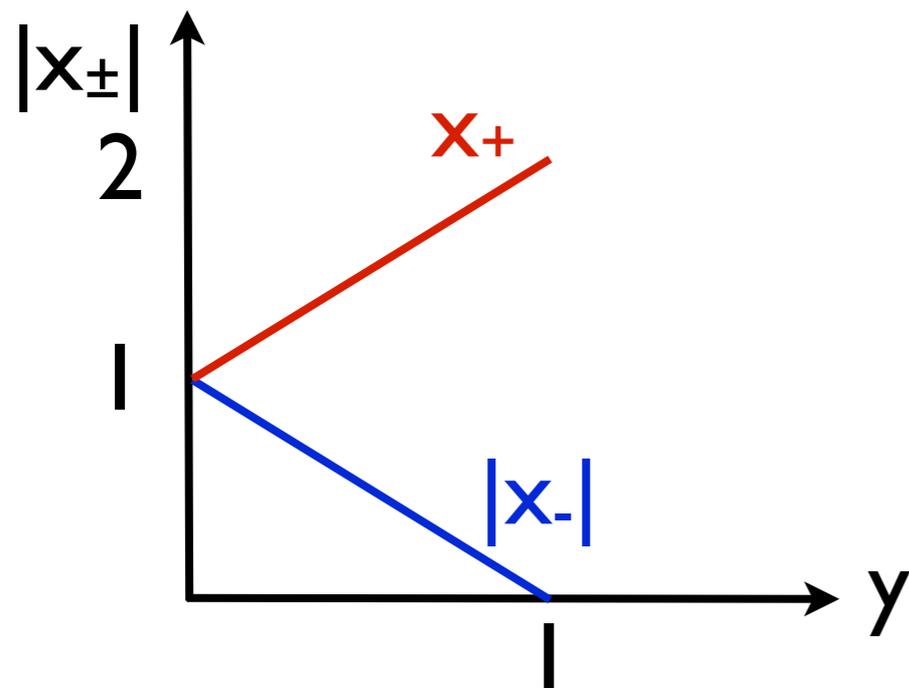
$|\beta| > \theta_E$ の時一つの像

等温球の場合の解と増光率

$$\frac{\beta}{\theta_E} = y \quad \frac{\theta}{\theta_E} = x \quad \text{とおくと}$$

$$\text{レンズ方程式 } y = x - \frac{x}{|x|} \rightarrow x_{\pm} = y \pm 1 \quad (y < 1)$$

$$\text{増光率 } \mu_{\pm} = 1 \pm \frac{1}{y}$$



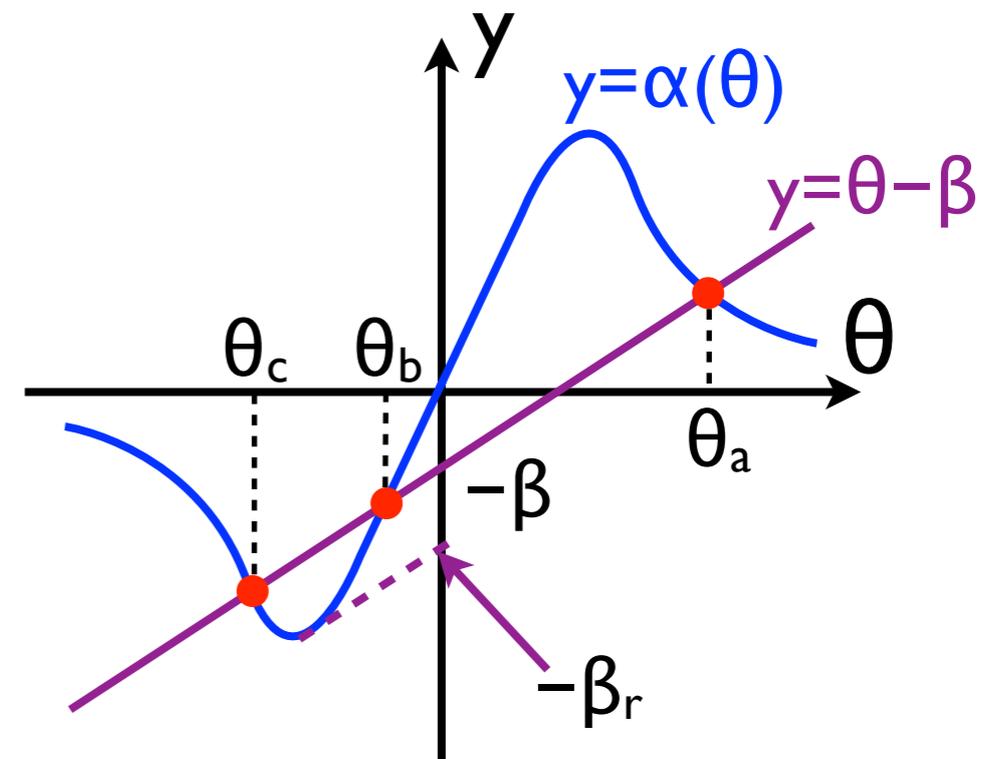
例 3: NFWプロファイル

- ダークハローの標準的な質量モデル (Navarro et al. 1997)

$$\rho(r) = \frac{\rho_s}{(r/r_s)(1+r/r_s)^2}$$

$$\bar{\kappa}(<\theta) \propto \begin{cases} \ln(\theta_s/\theta) & (\theta \ll \theta_s) \\ \theta^{-2} & (\theta \gg \theta_s) \end{cases}$$

$$\alpha(\theta) \propto \begin{cases} \theta \ln(\theta_s/\theta) & (\theta \ll \theta_s) \\ \theta^{-1} & (\theta \gg \theta_s) \end{cases}$$



$|\beta| < \beta_r$ の時三つの像

$|\beta| > \beta_r$ の時一つの像

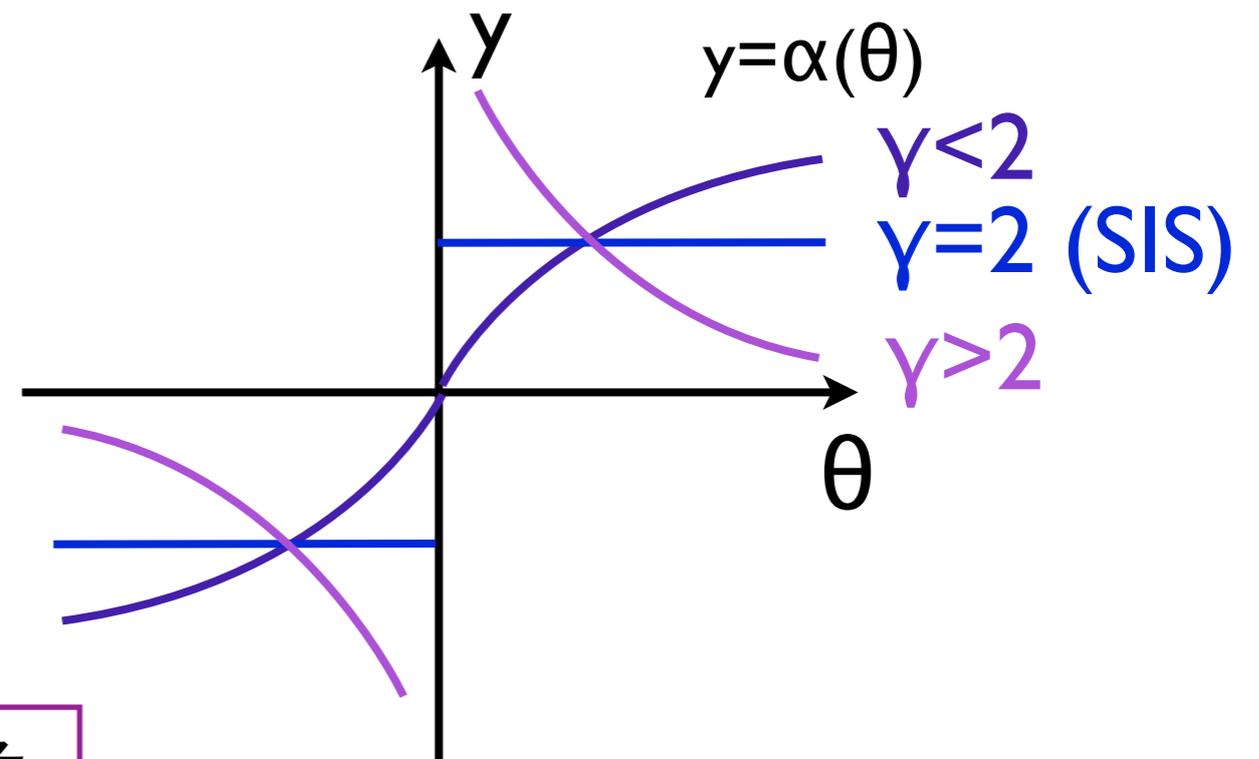
例 4: 冪乗則 (power-law) 質量分布

- 動径密度分布依存性を理解するのに便利

$$\rho(r) \propto r^{-\gamma}$$

$$\kappa(\theta) \propto \theta^{1-\gamma}$$

$$\alpha(\theta) \propto \theta^{2-\gamma}$$



$\gamma < 2$ の時最大三つの像
 $\gamma \geq 2$ の時最大二つの像

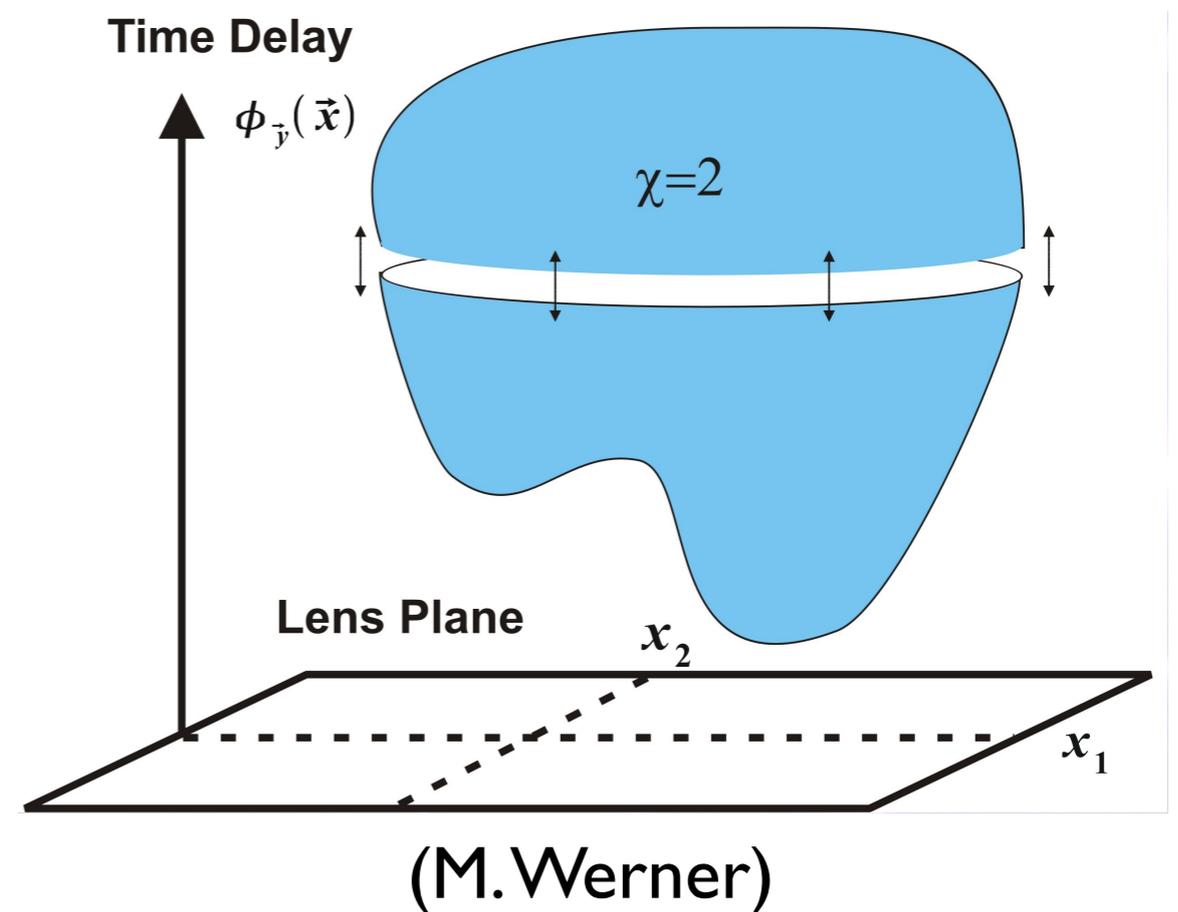
「odd number theorem」 との関連

- 多様体のモース理論 → 像の数は奇数個

$$n_{\min} - n_{\text{sad}} + n_{\max} + 1 = \chi = 2$$

$$n_{\text{tot}} = n_{\min} + n_{\text{sad}} + n_{\max} = 2n_{\text{sad}} + 1$$

- これが成立するのは time delay surface が滑らかで閉じた場合 (cf. SISでは不成立)



より現実的な質量モデル (I)

- 楕円レンズ

$$\theta \rightarrow u \equiv \sqrt{\frac{\theta_1^2}{1-e} + (1-e)\theta_2^2}$$

二つのアプローチ:

1. 楕円密度分布 $\kappa(u)$

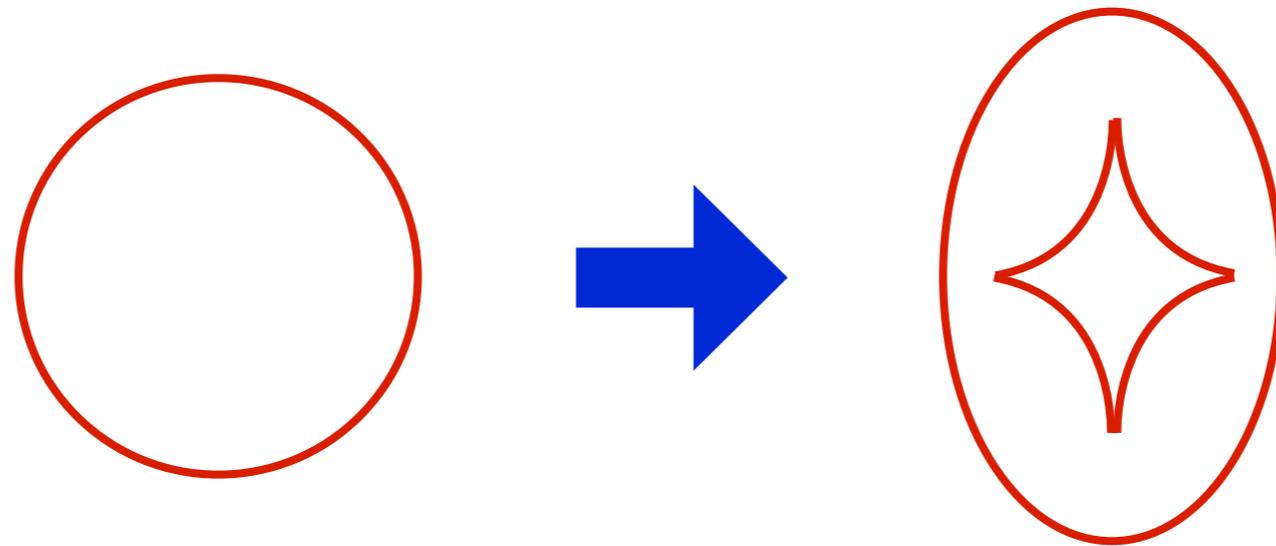
$\kappa(u) \rightarrow \psi(\vec{\theta}), \alpha(\vec{\theta}), \dots$ 一次元積分必要 (Schramm 1990)
(ほとんどの場合) 数値積分なのでコスト大

2. 楕円ポテンシャル $\psi(u)$

軸対称レンズの結果をそのまま応用可なので
簡単、ただし非物理的な質量分布を生む可能性
(‘dumbbell’-like κ map, 負の κ , ...)

楕円レンズの複数像

- 軸対称で中心に縮退していた tangential caustic が出現する (ダイヤ型)
- さらに多くの像が出現



楕円レンズの複数像 (広がったソース)

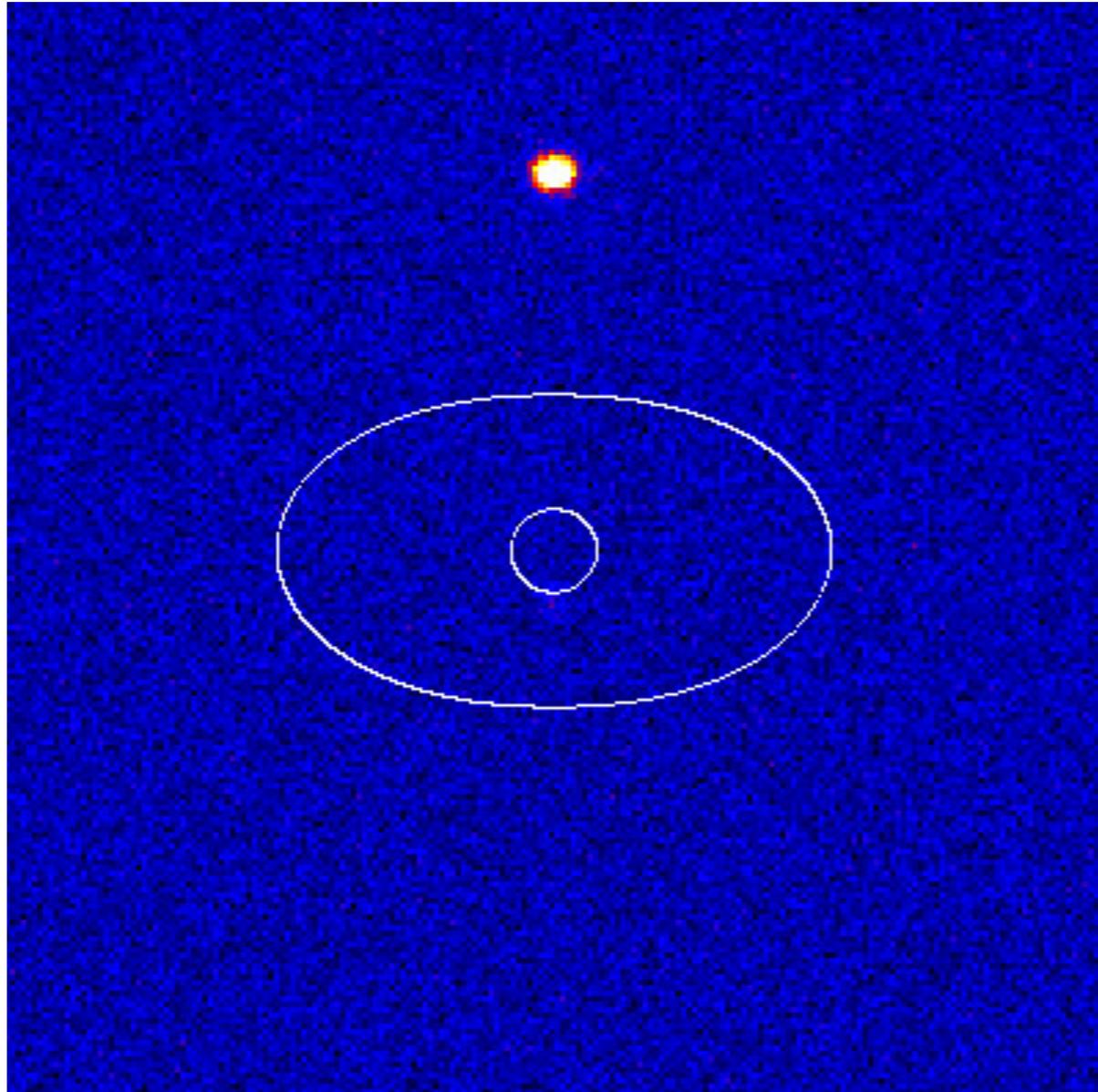
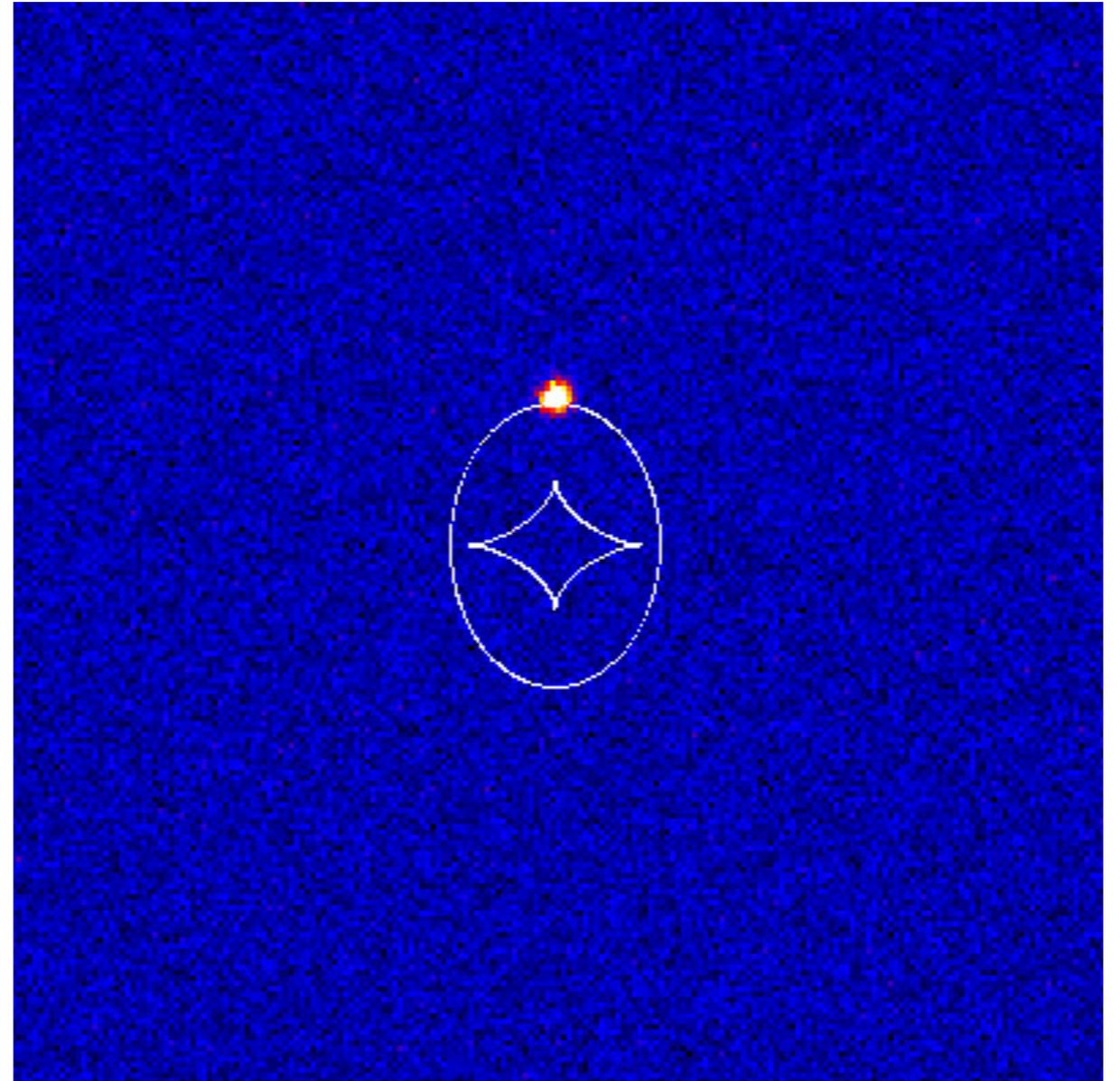


image plane
(critical curves)



source plane
(caustics)

楕円レンズの複数像 (広がったソース)

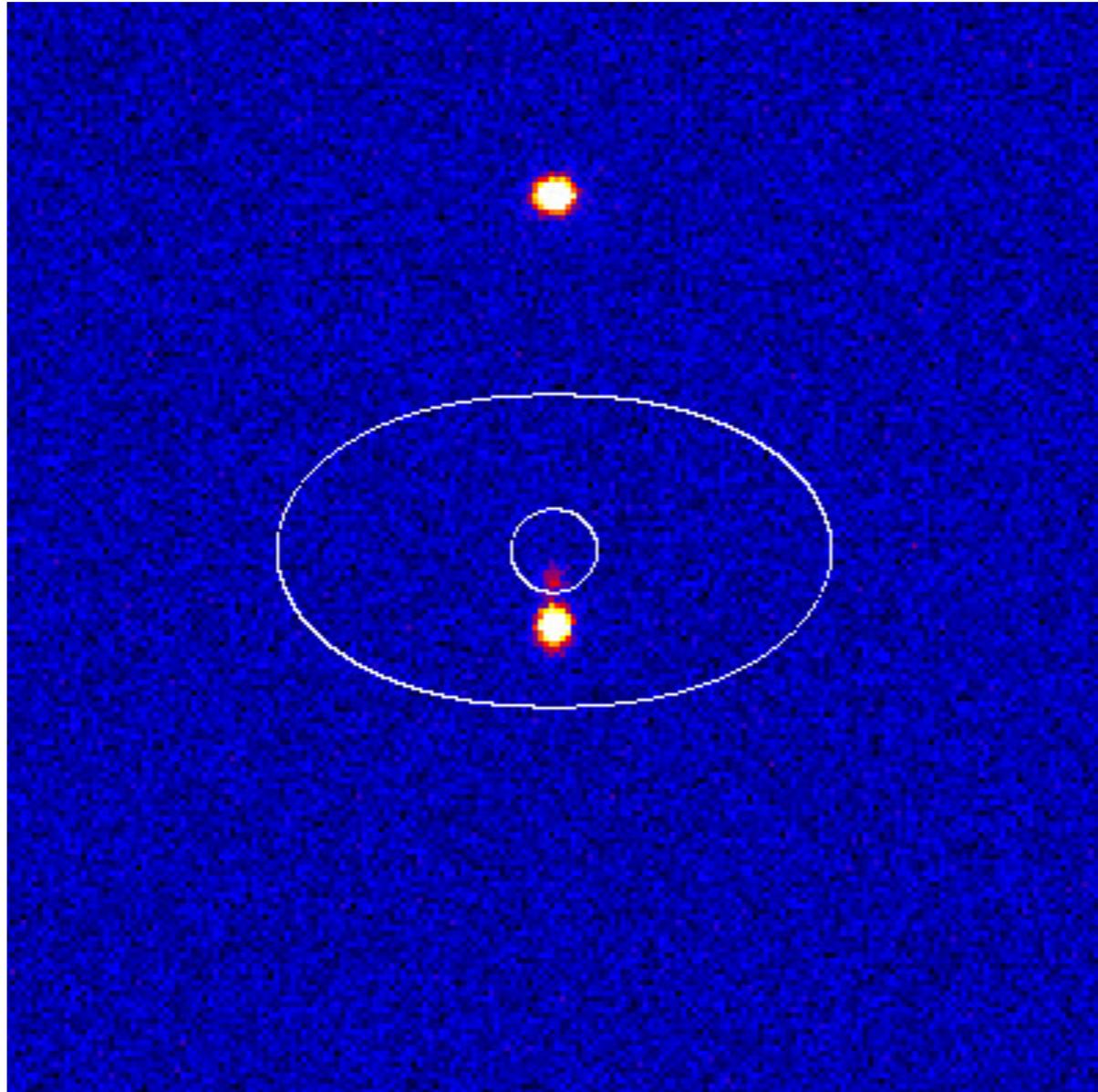
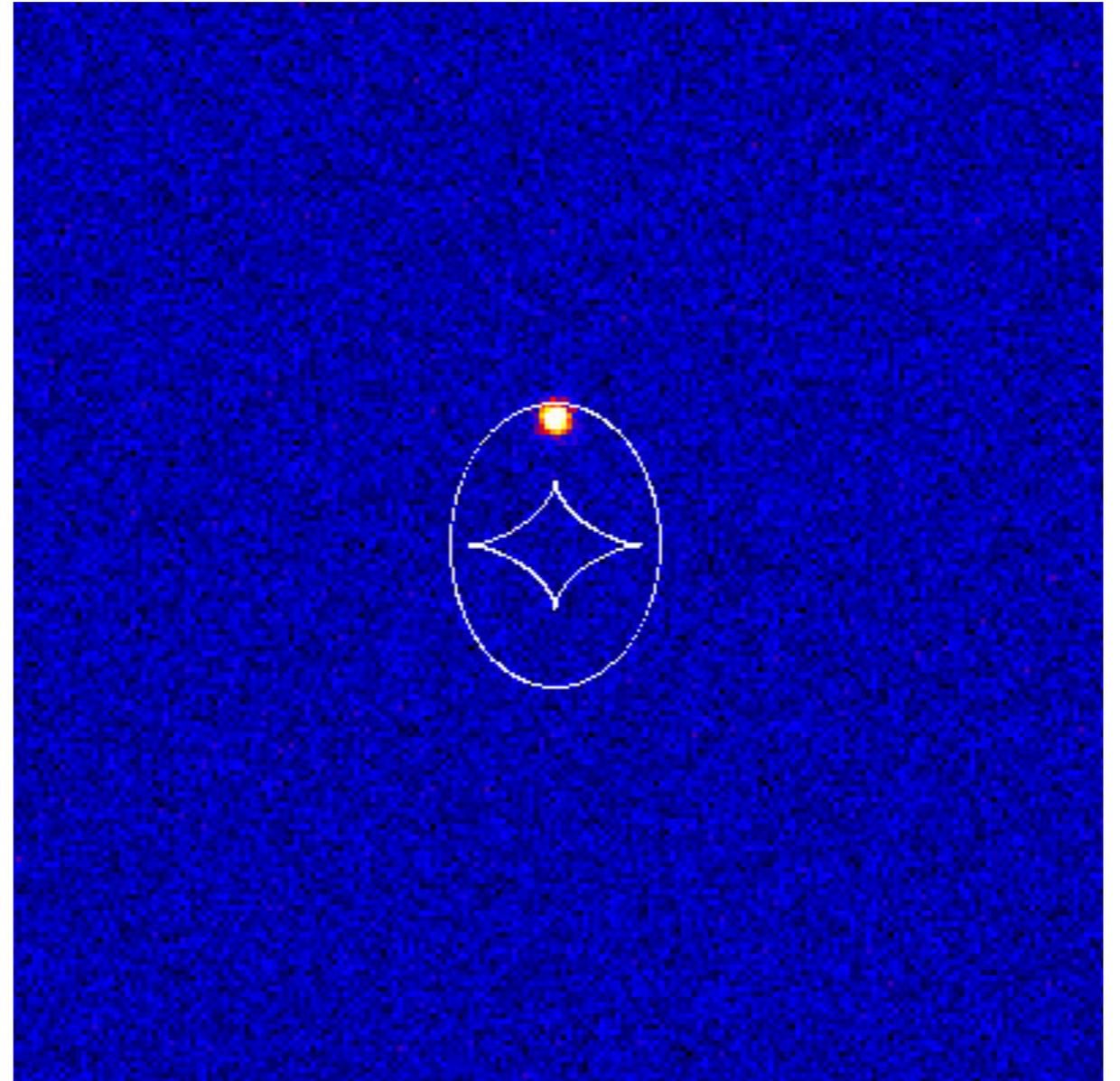


image plane
(critical curves)



source plane
(caustics)

楕円レンズの複数像 (広がったソース)

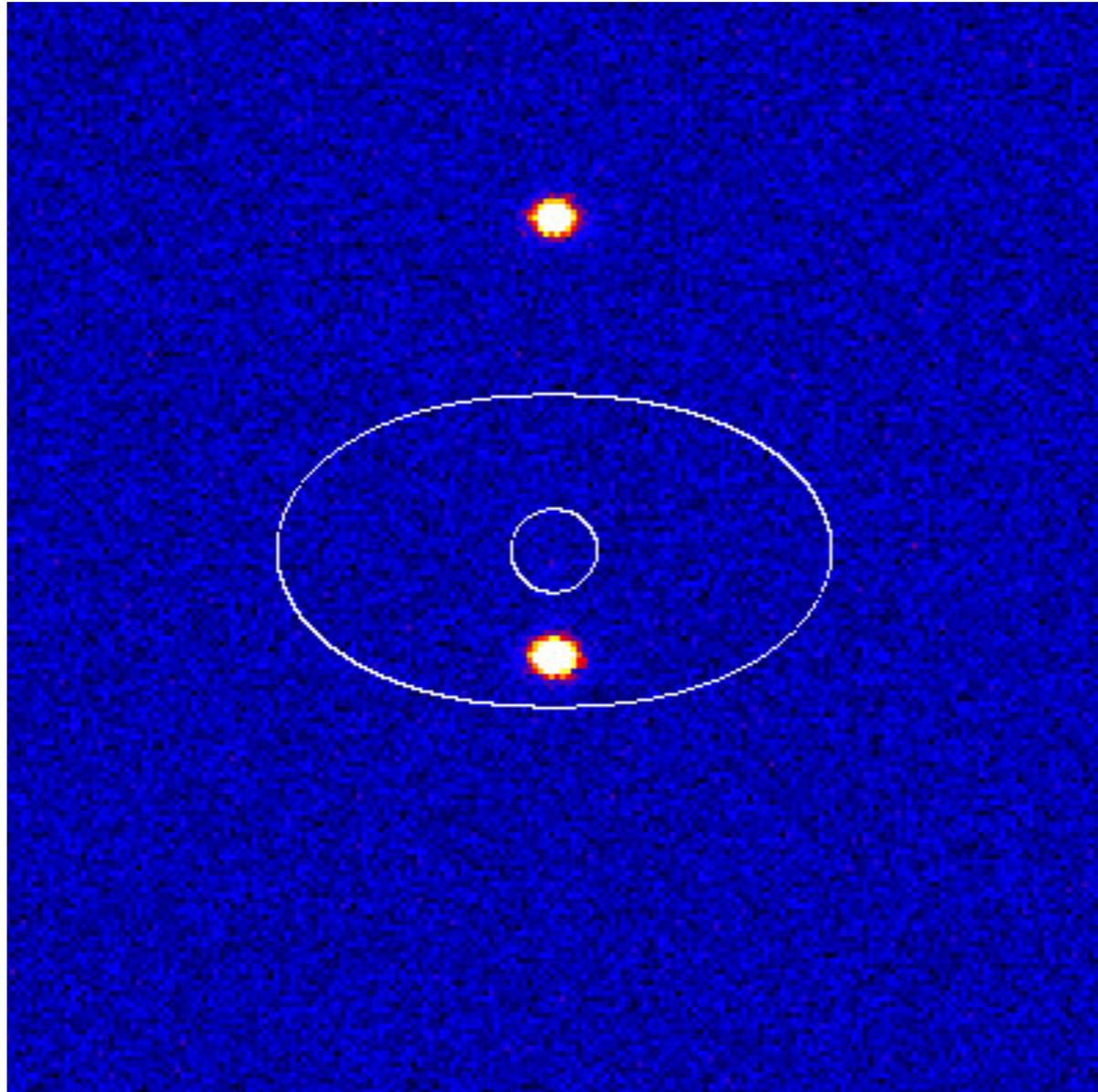
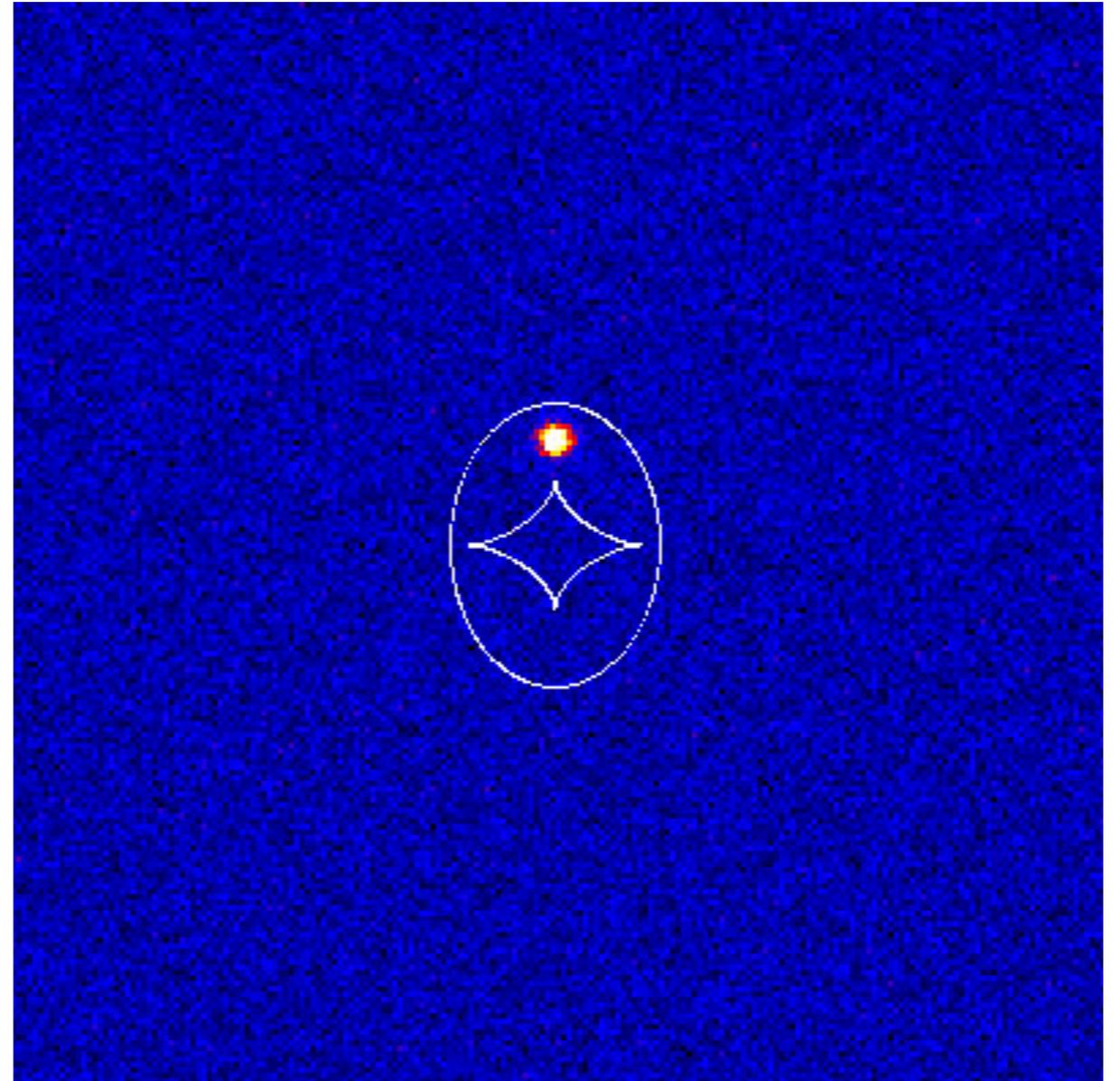


image plane
(critical curves)



source plane
(caustics)

楕円レンズの複数像 (広がったソース)

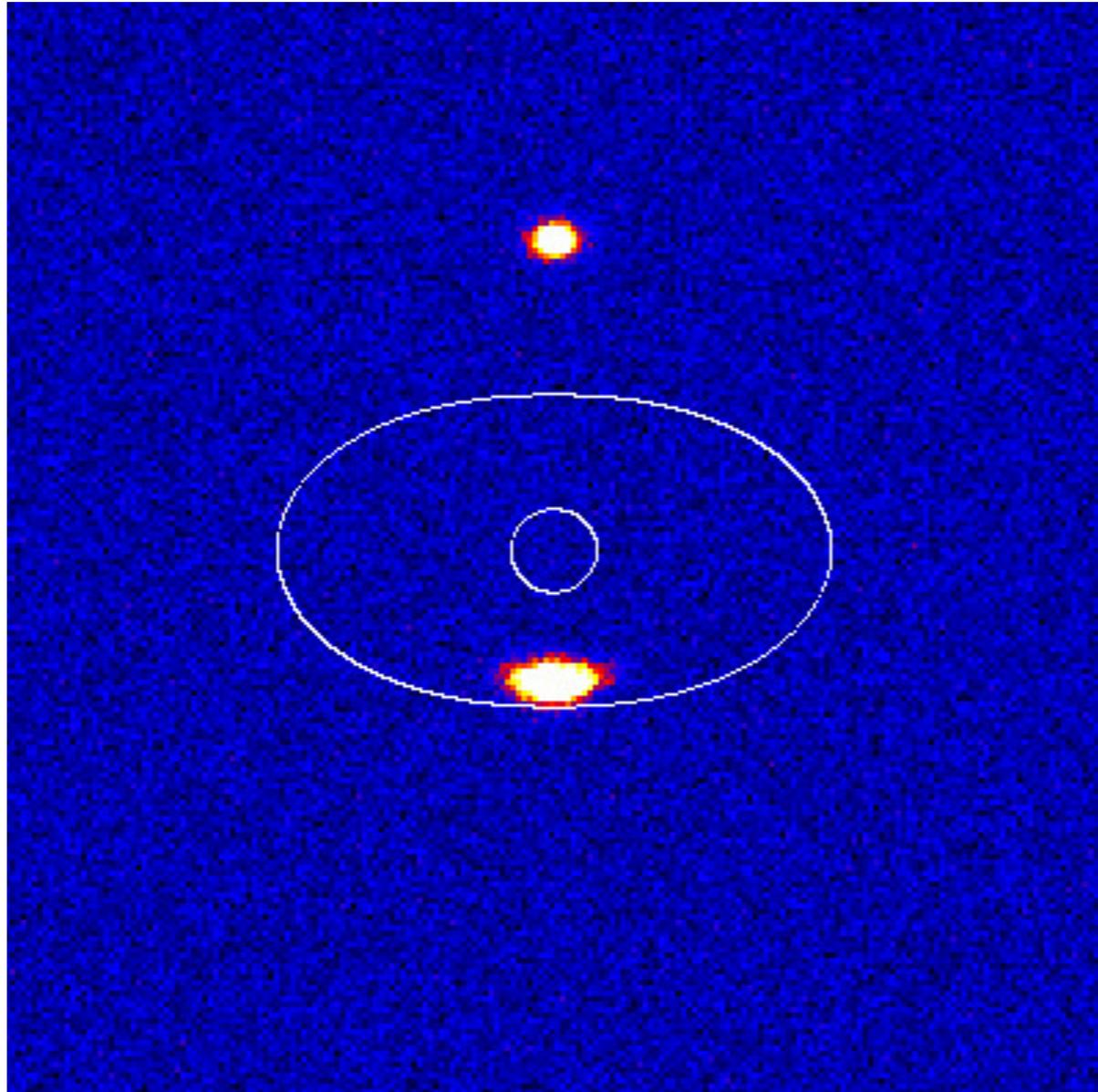
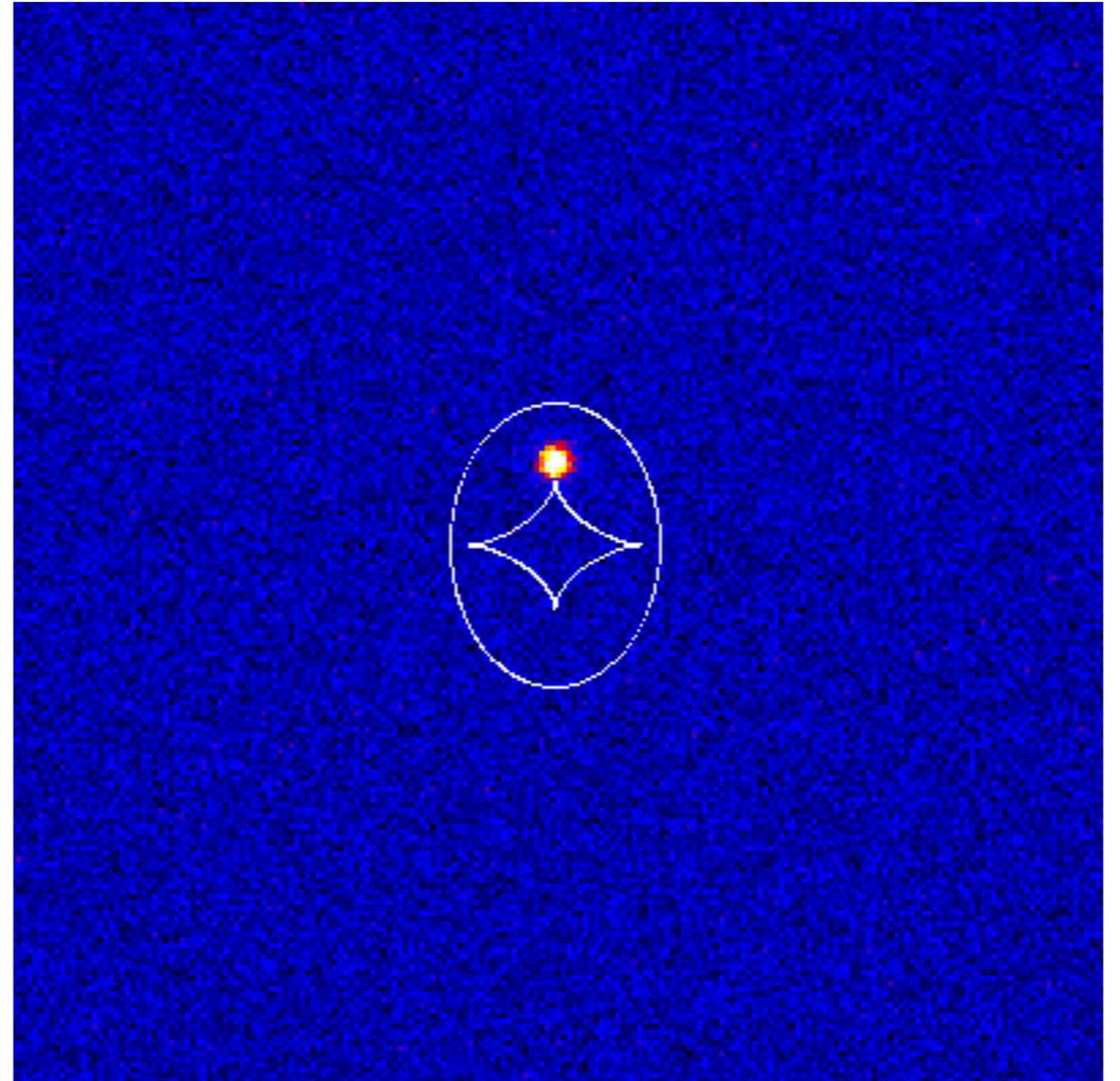


image plane
(critical curves)



source plane
(caustics)

楕円レンズの複数像 (広がったソース)

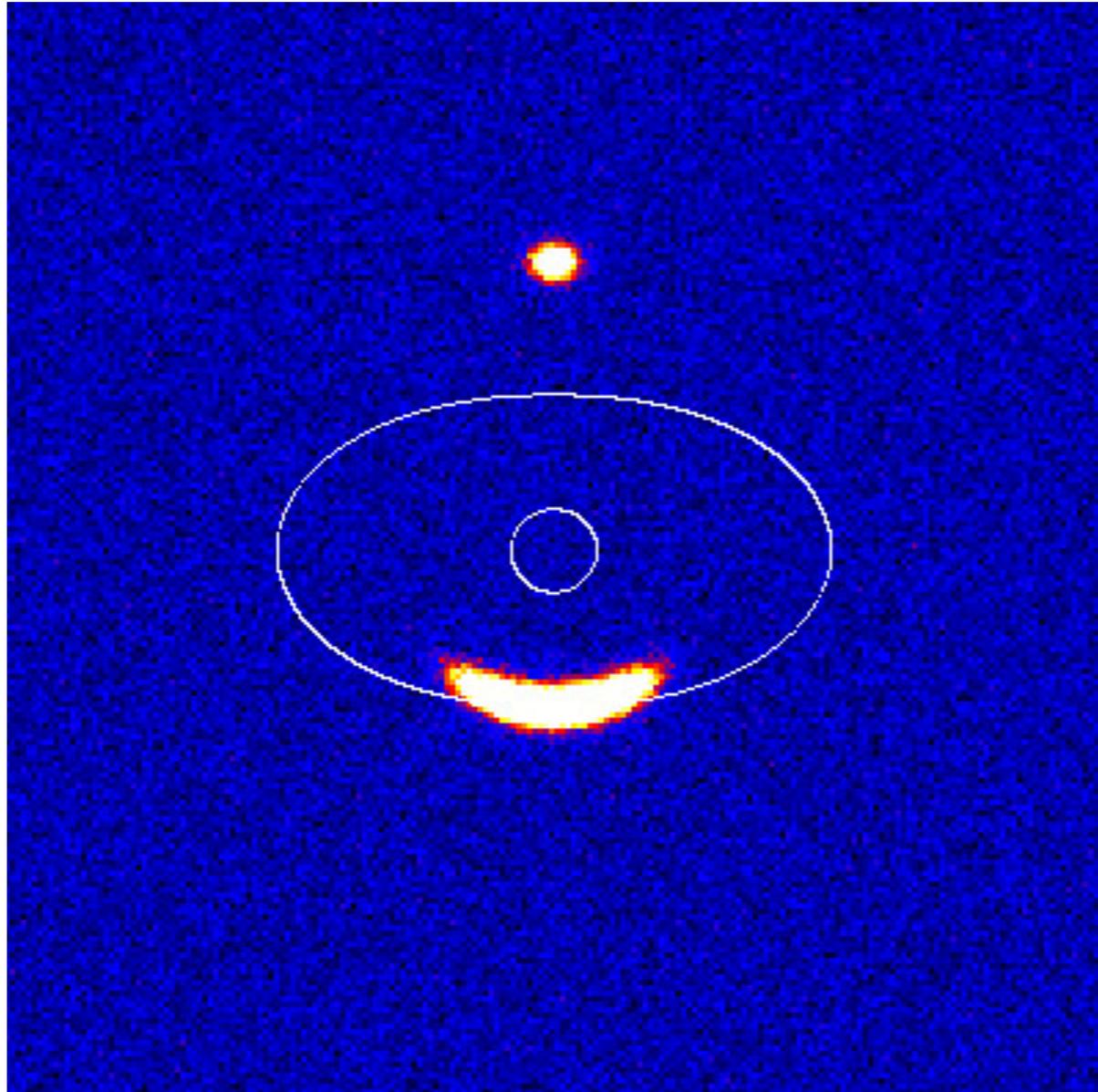
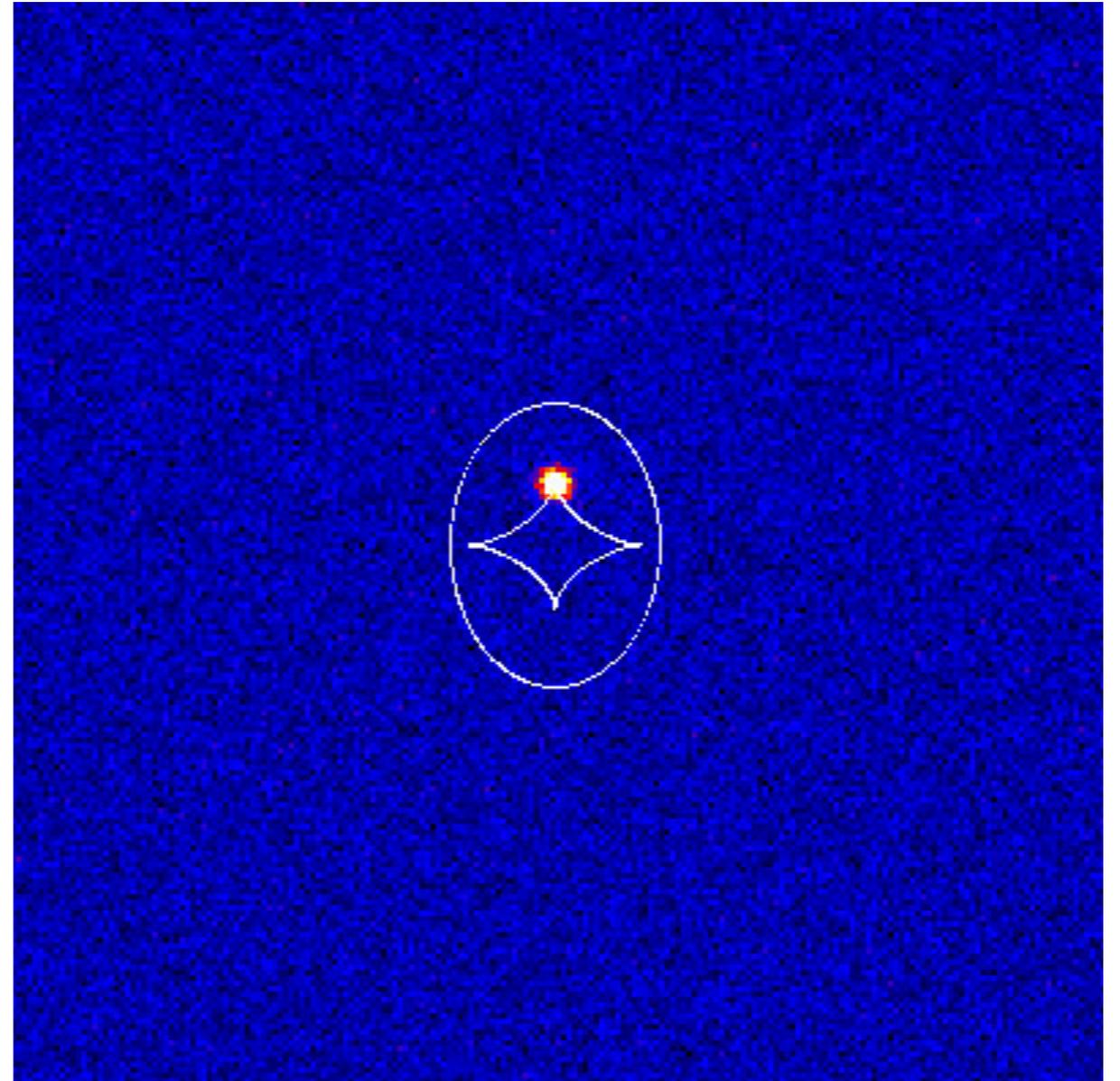


image plane
(critical curves)



source plane
(caustics)

楕円レンズの複数像 (広がったソース)

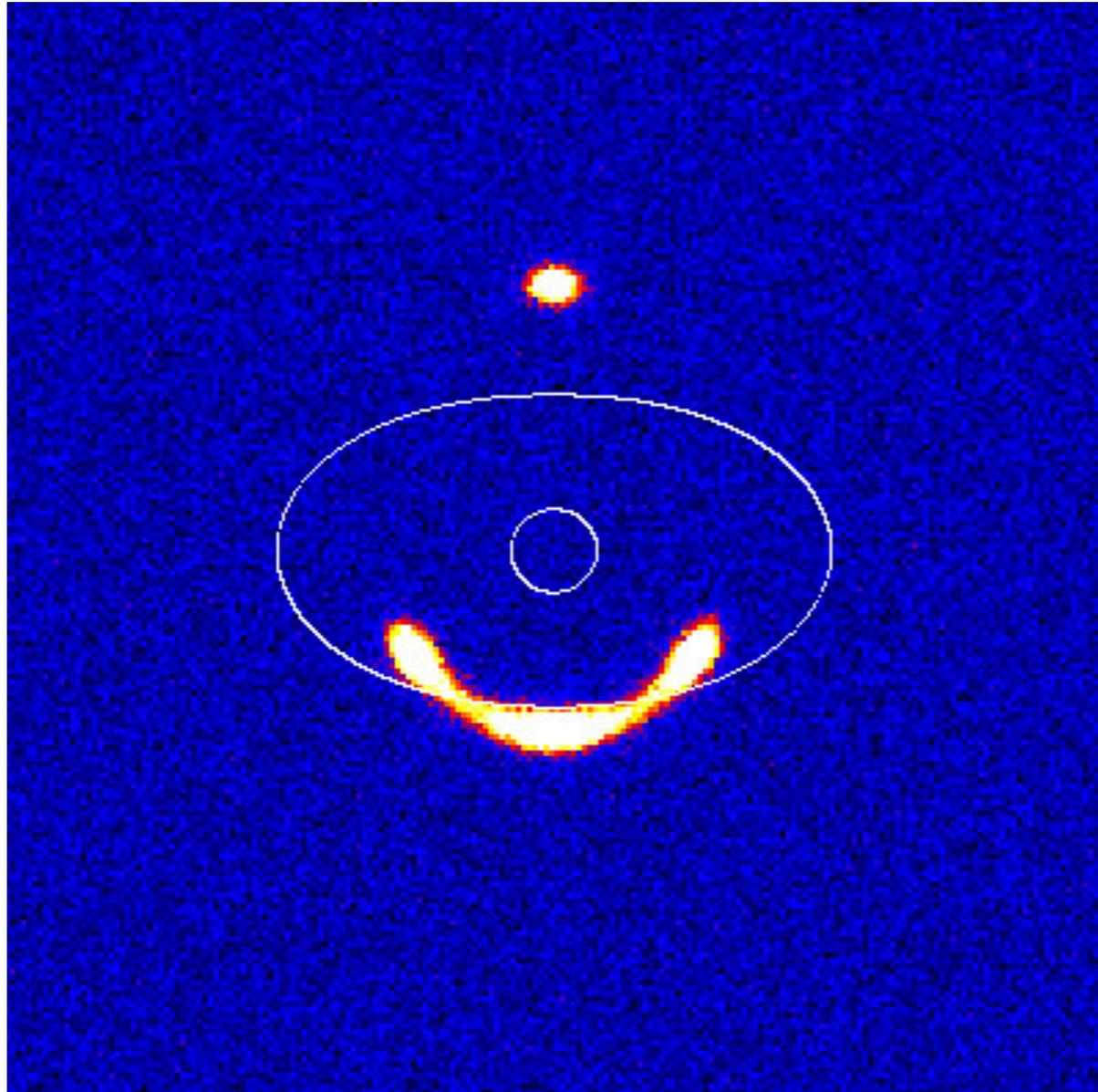
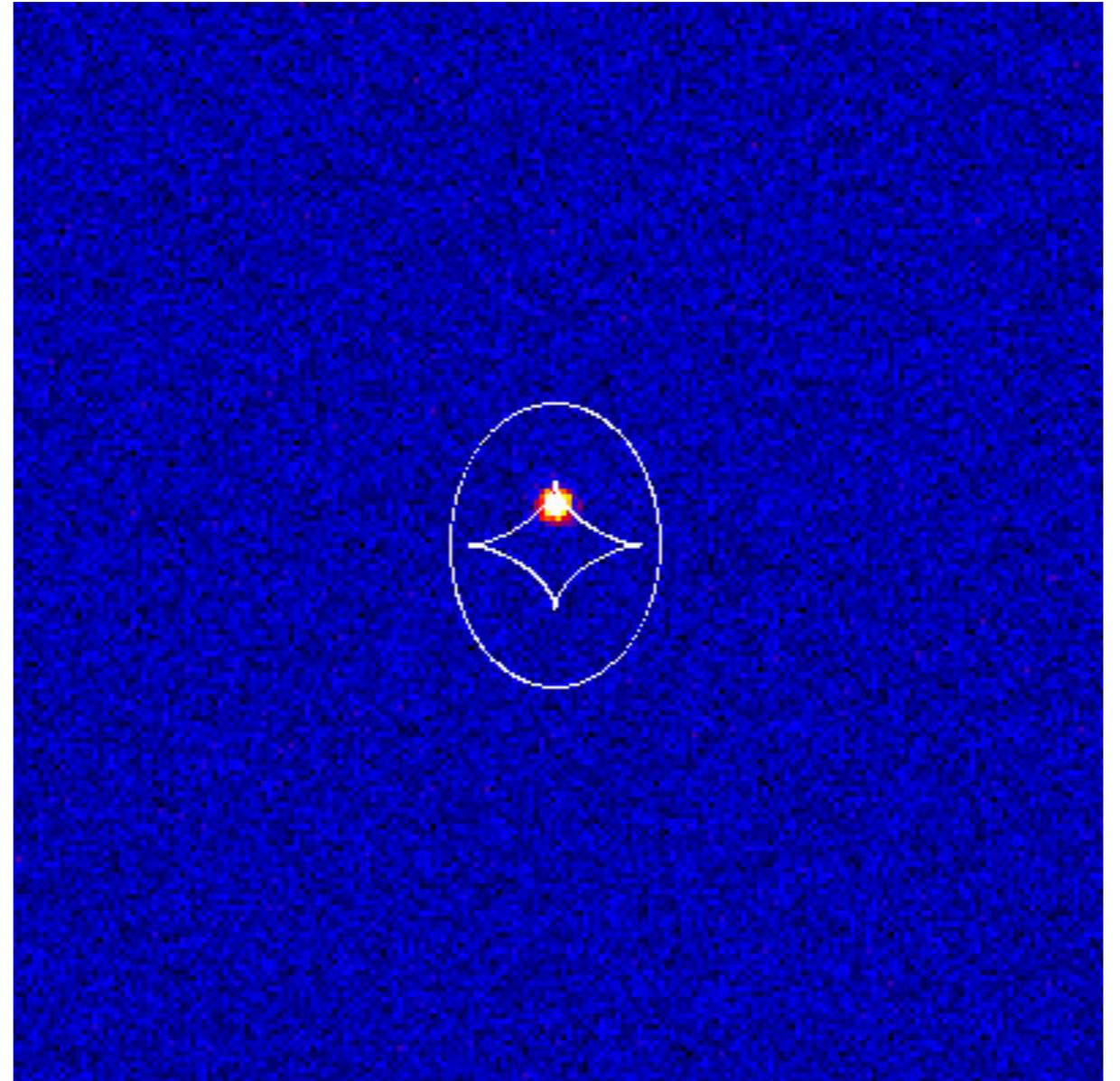


image plane
(critical curves)



source plane
(caustics)

楕円レンズの複数像 (広がったソース)

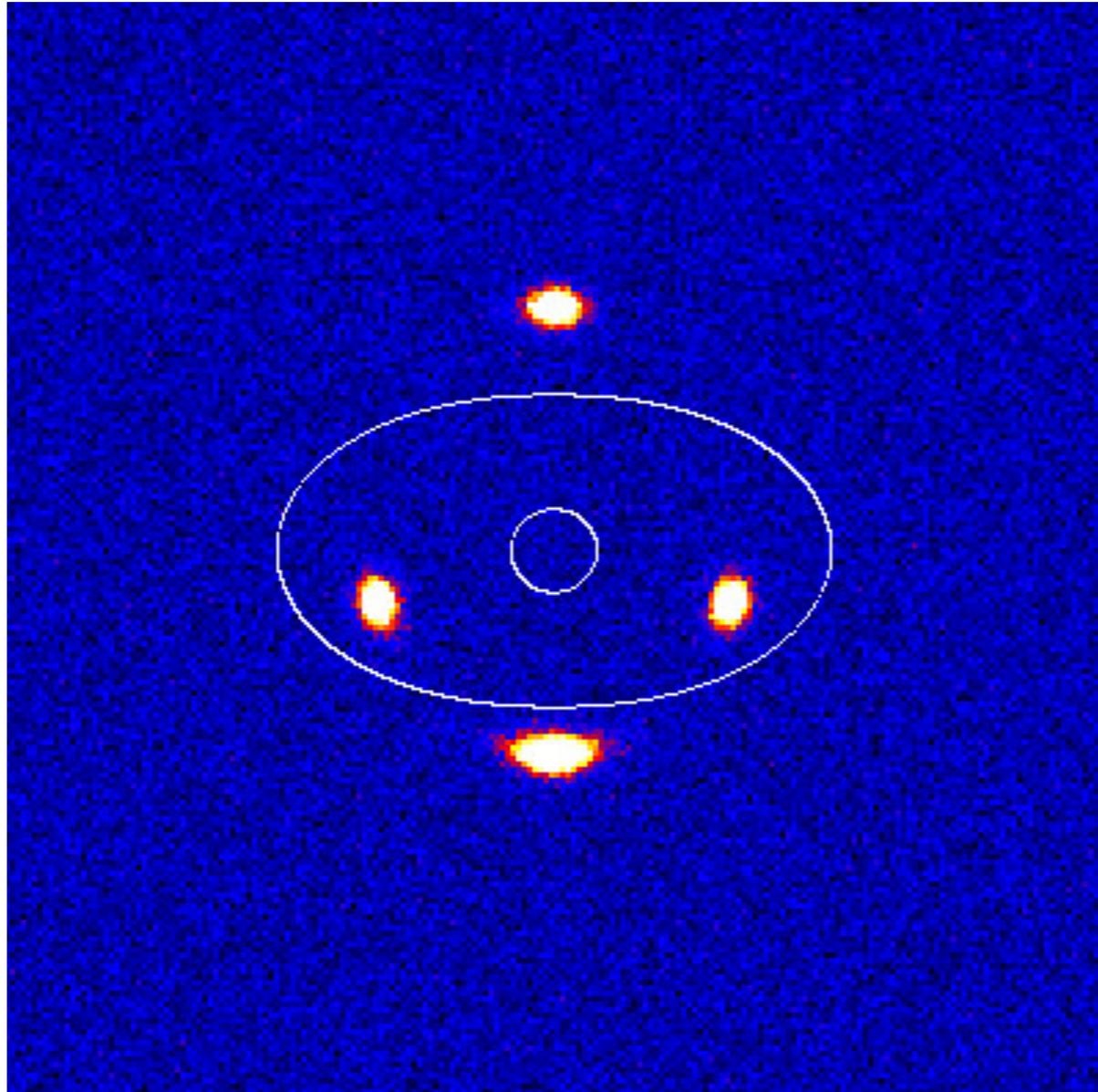
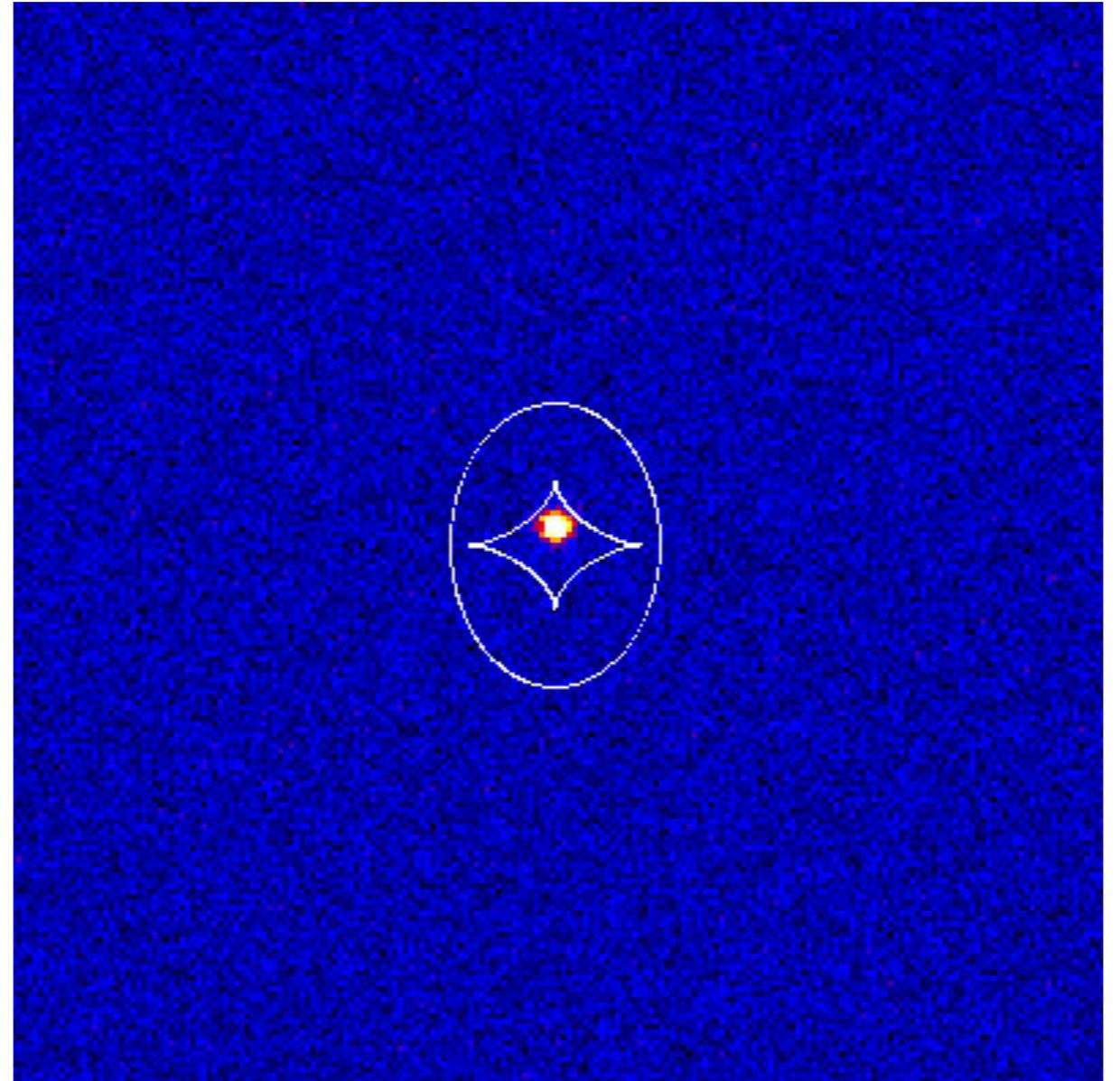


image plane
(critical curves)



source plane
(caustics)

楕円レンズの複数像 (広がったソース)

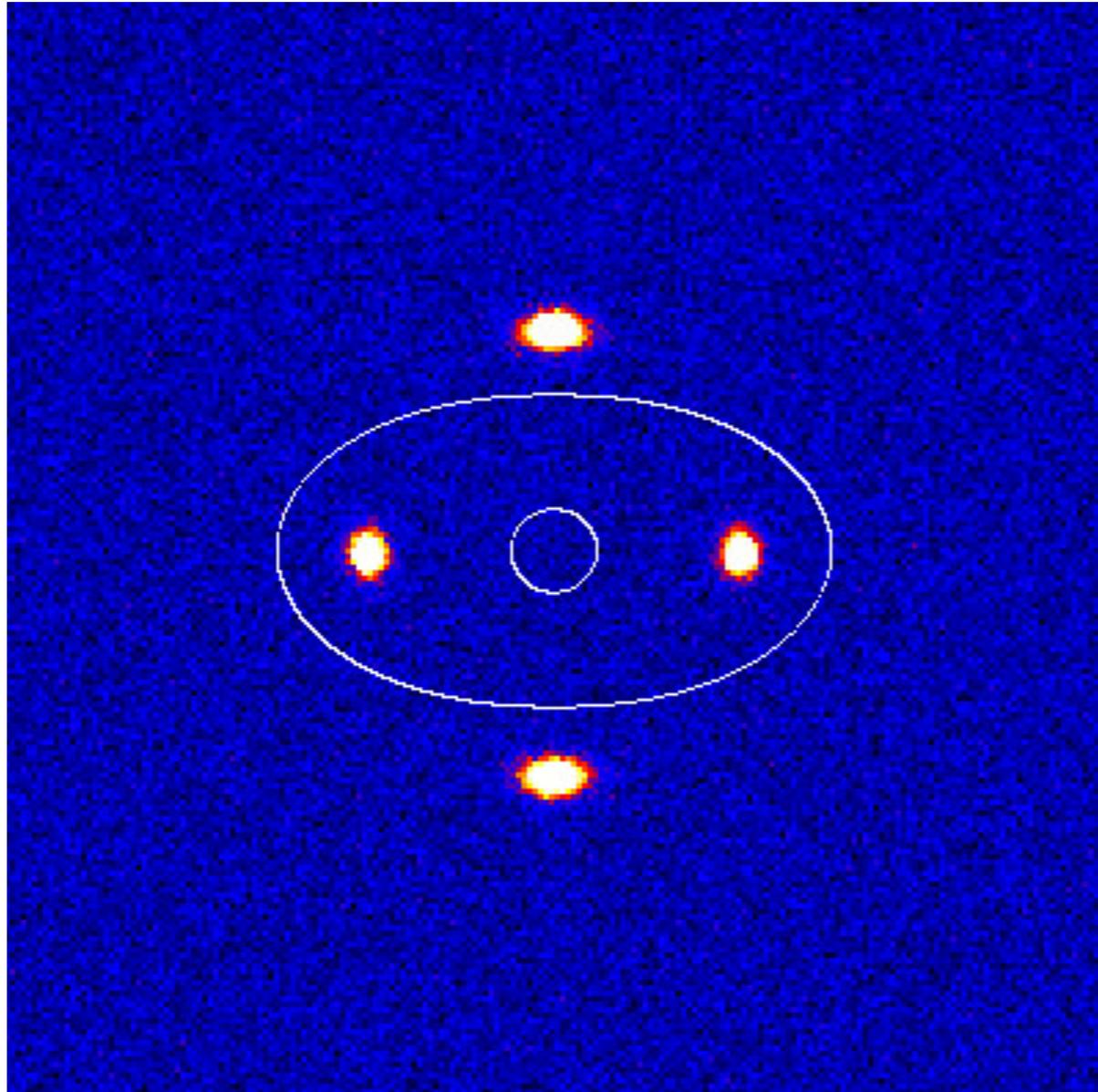
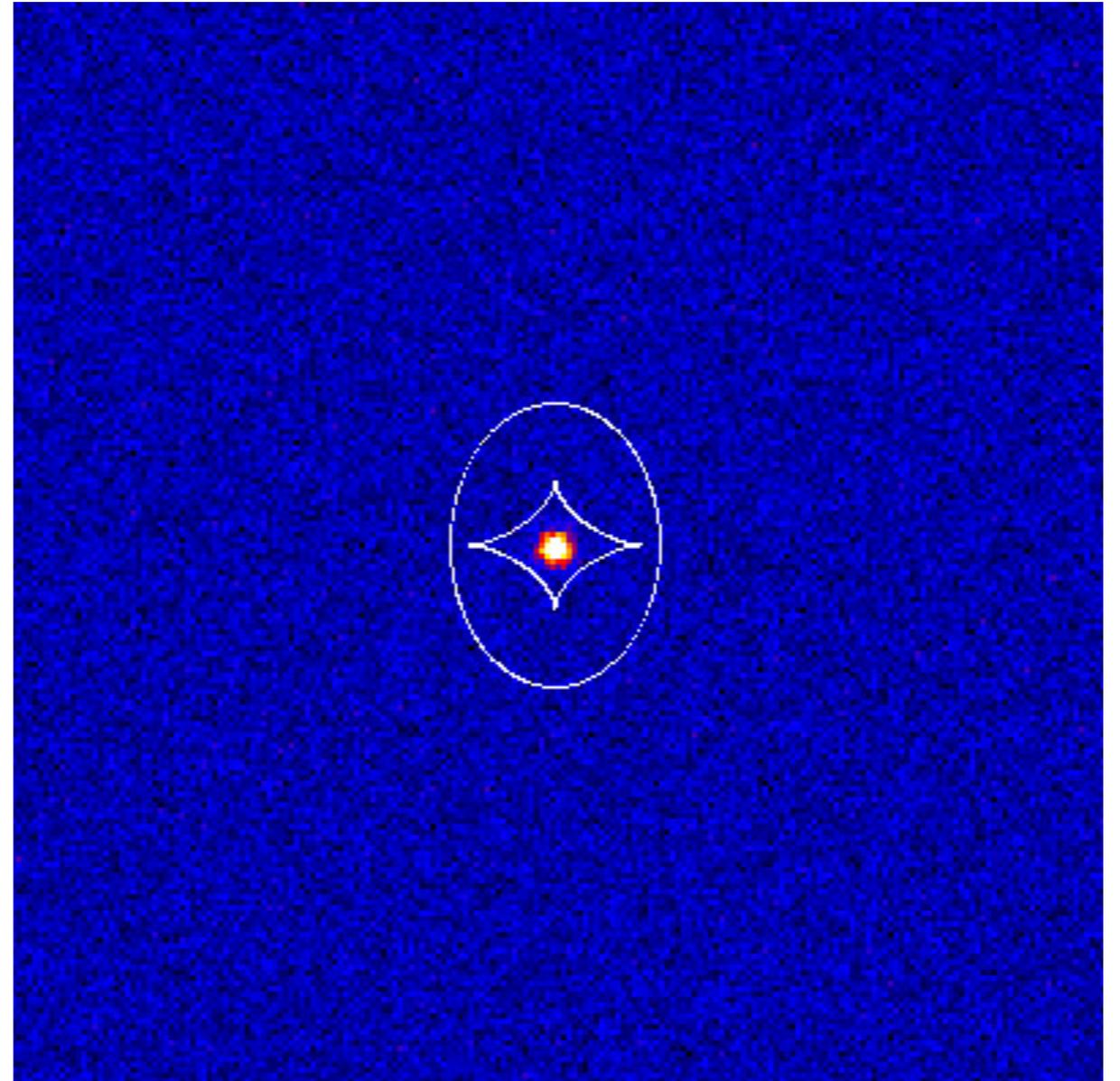


image plane
(critical curves)



source plane
(caustics)

楕円レンズの複数像 (広がったソース)

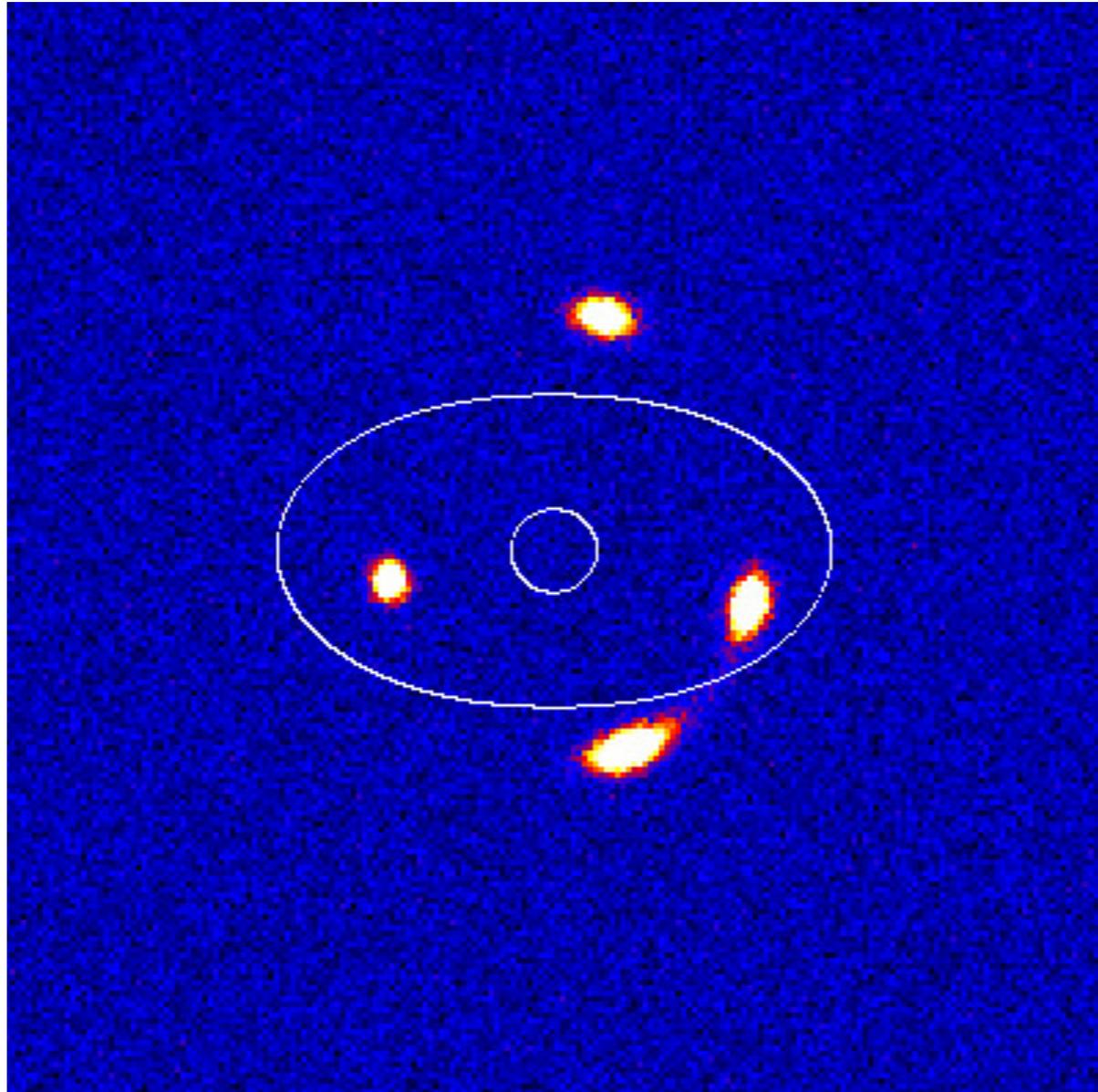
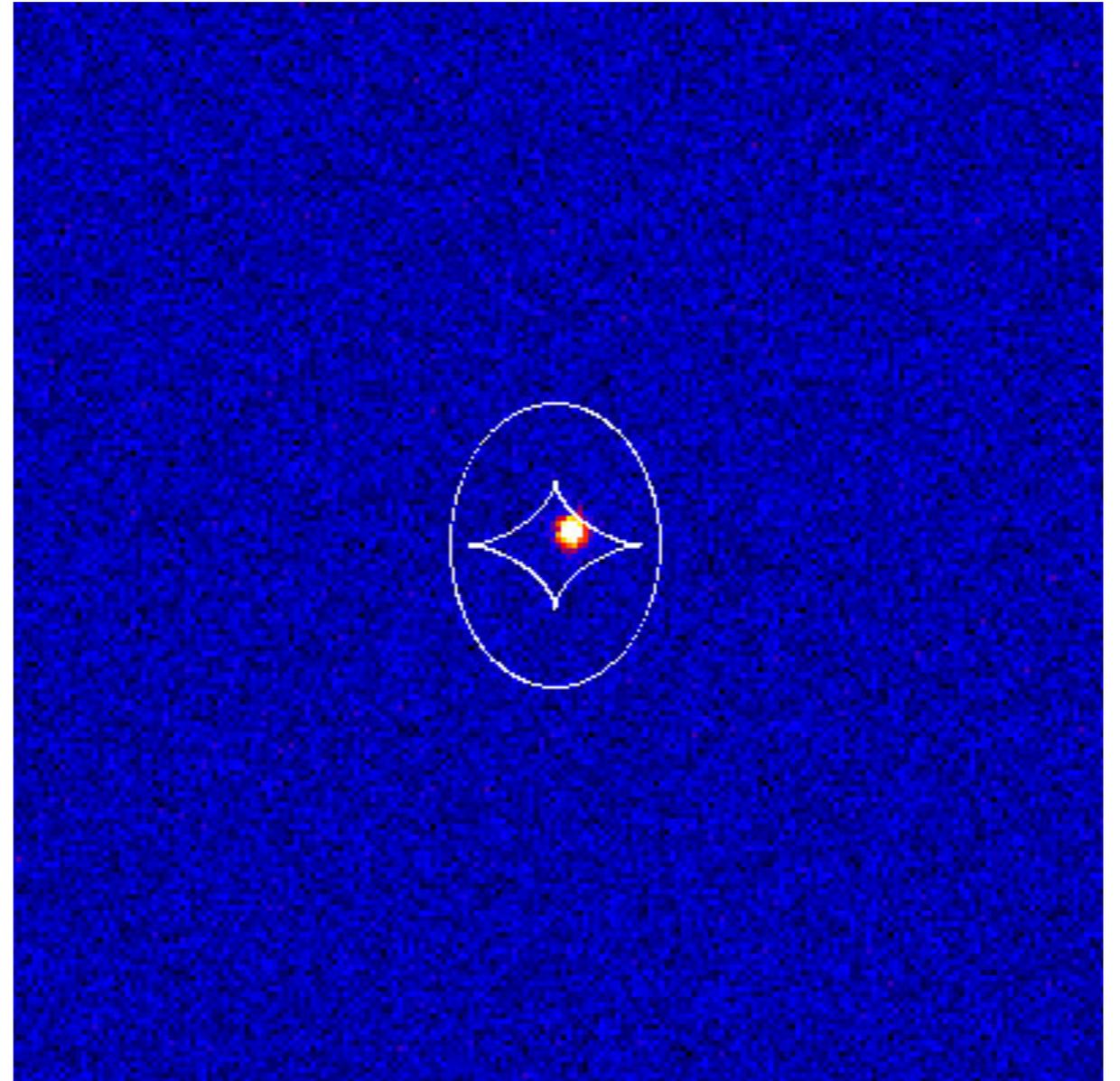


image plane
(critical curves)



source plane
(caustics)

simulated by *glafic*

楕円レンズの複数像 (広がったソース)

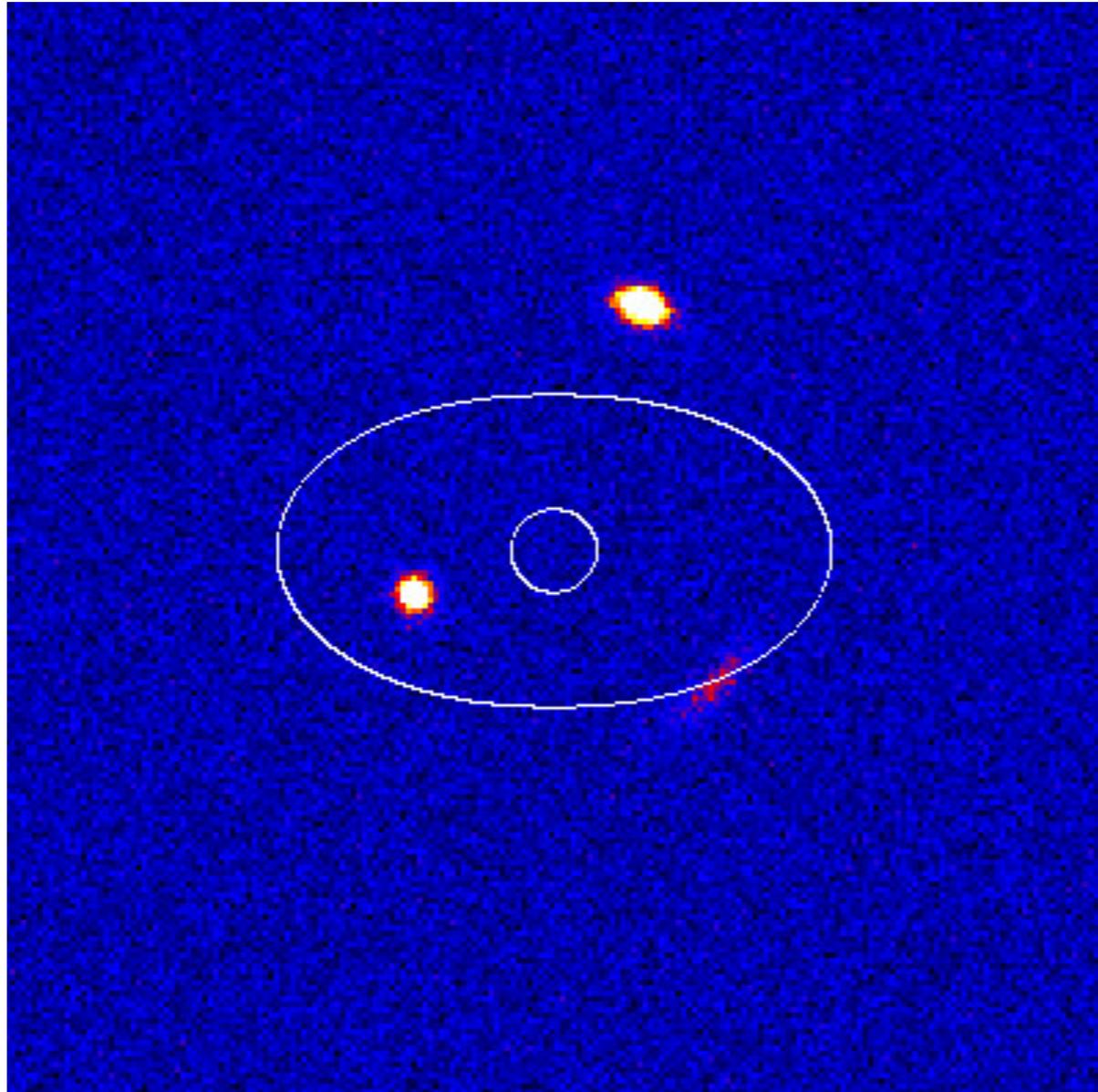
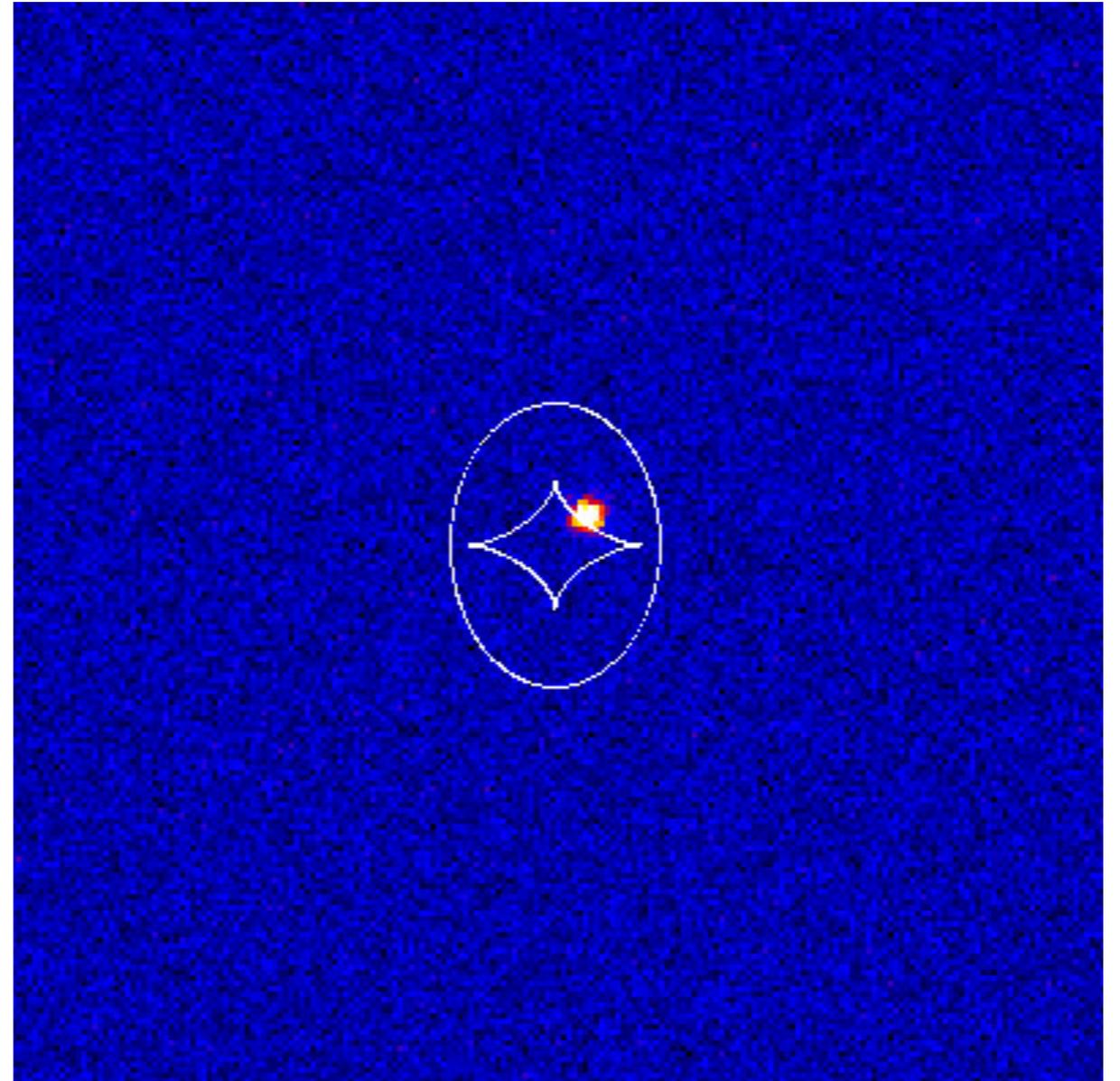


image plane
(critical curves)



source plane
(caustics)

楕円レンズの複数像 (広がったソース)

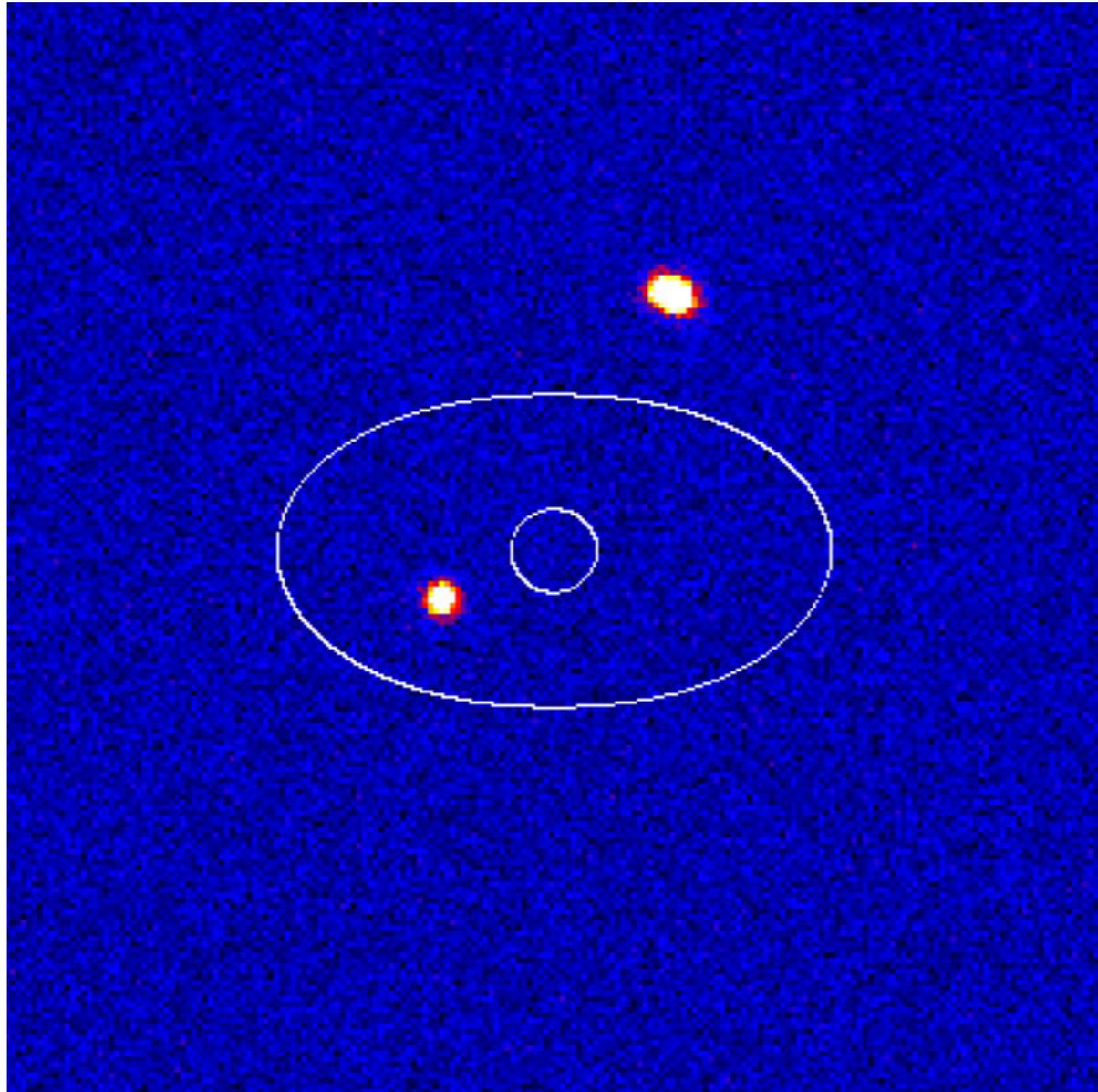
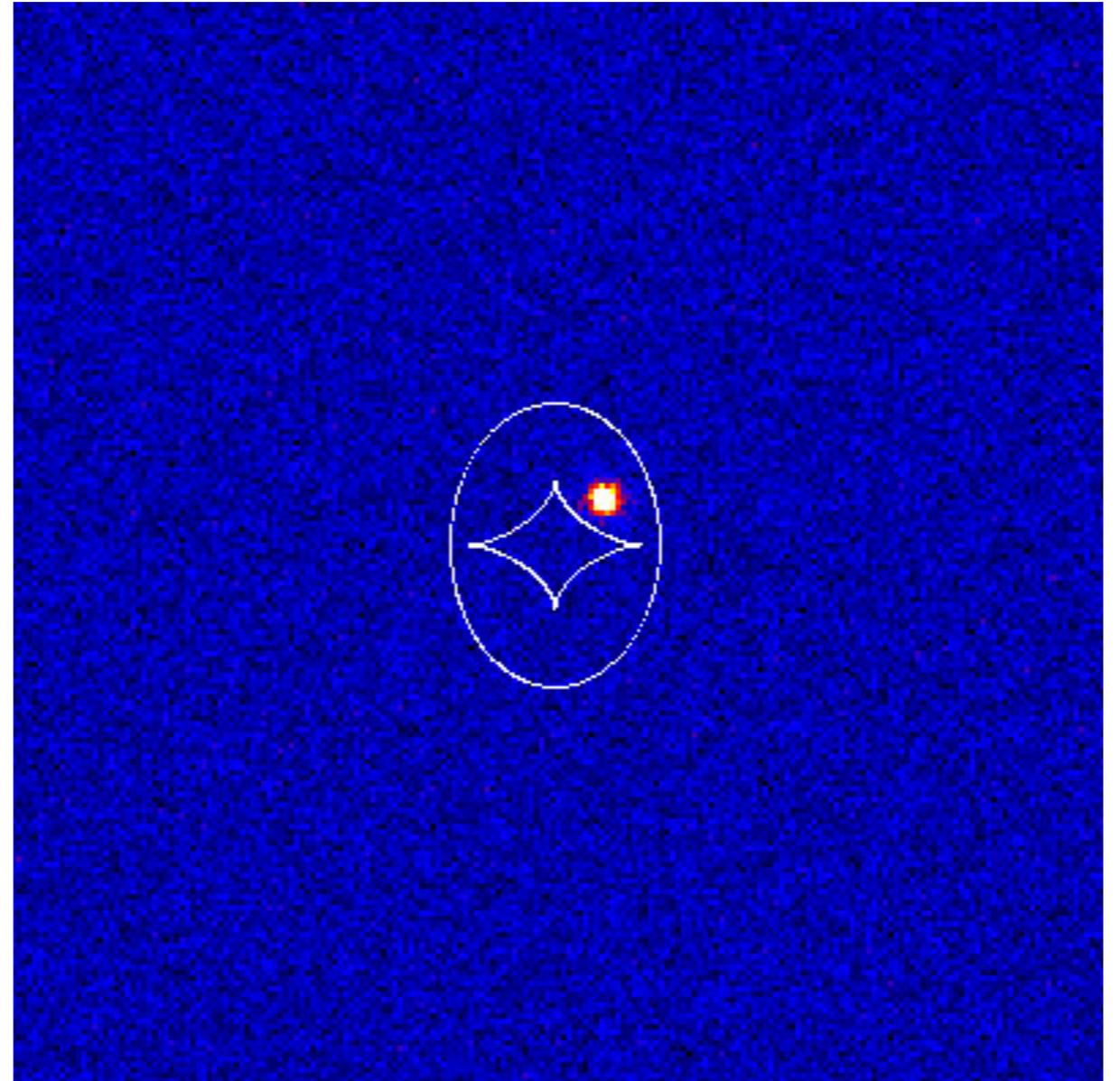


image plane
(critical curves)



source plane
(caustics)

楕円レンズの複数像 (広がったソース)

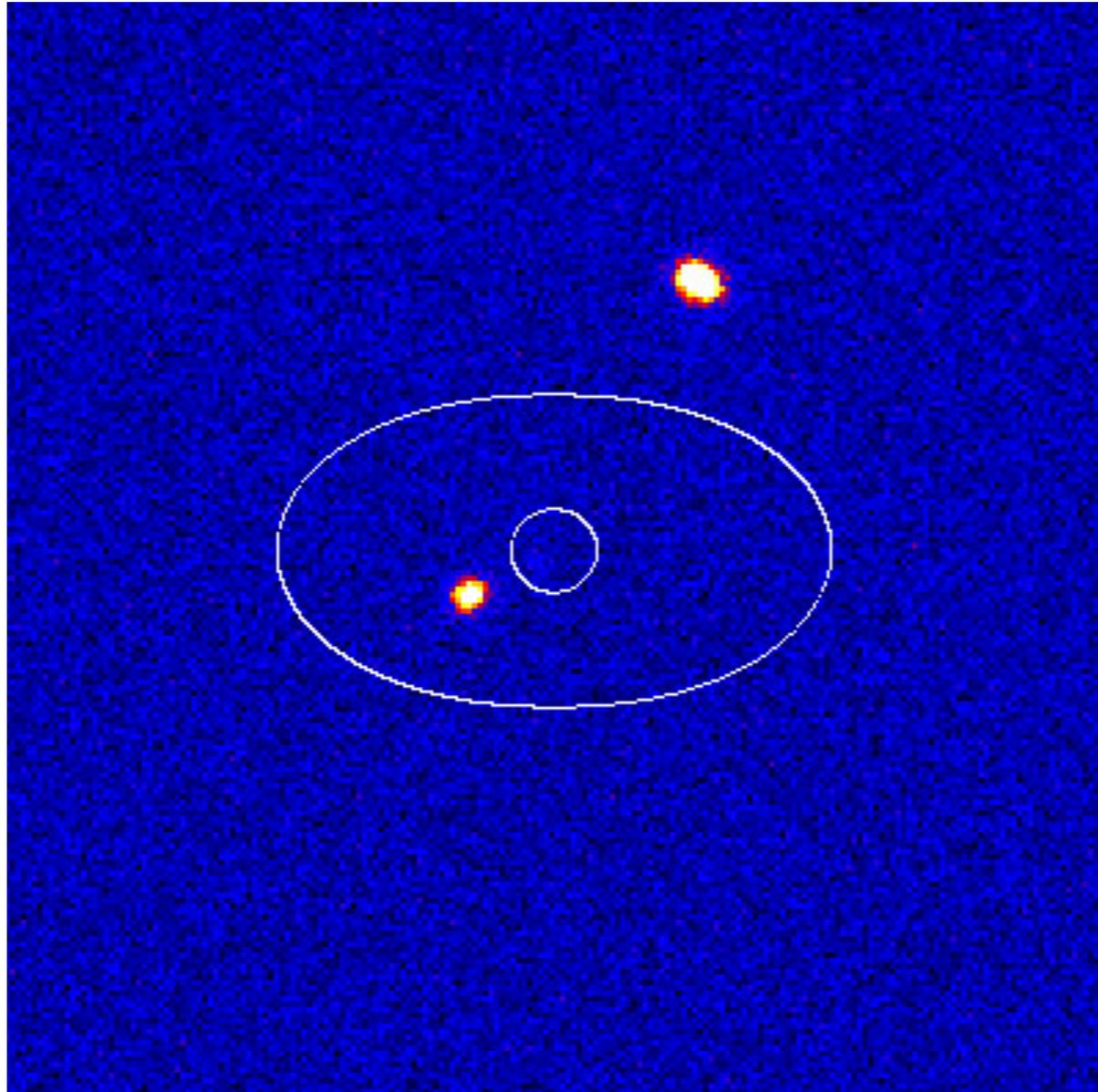
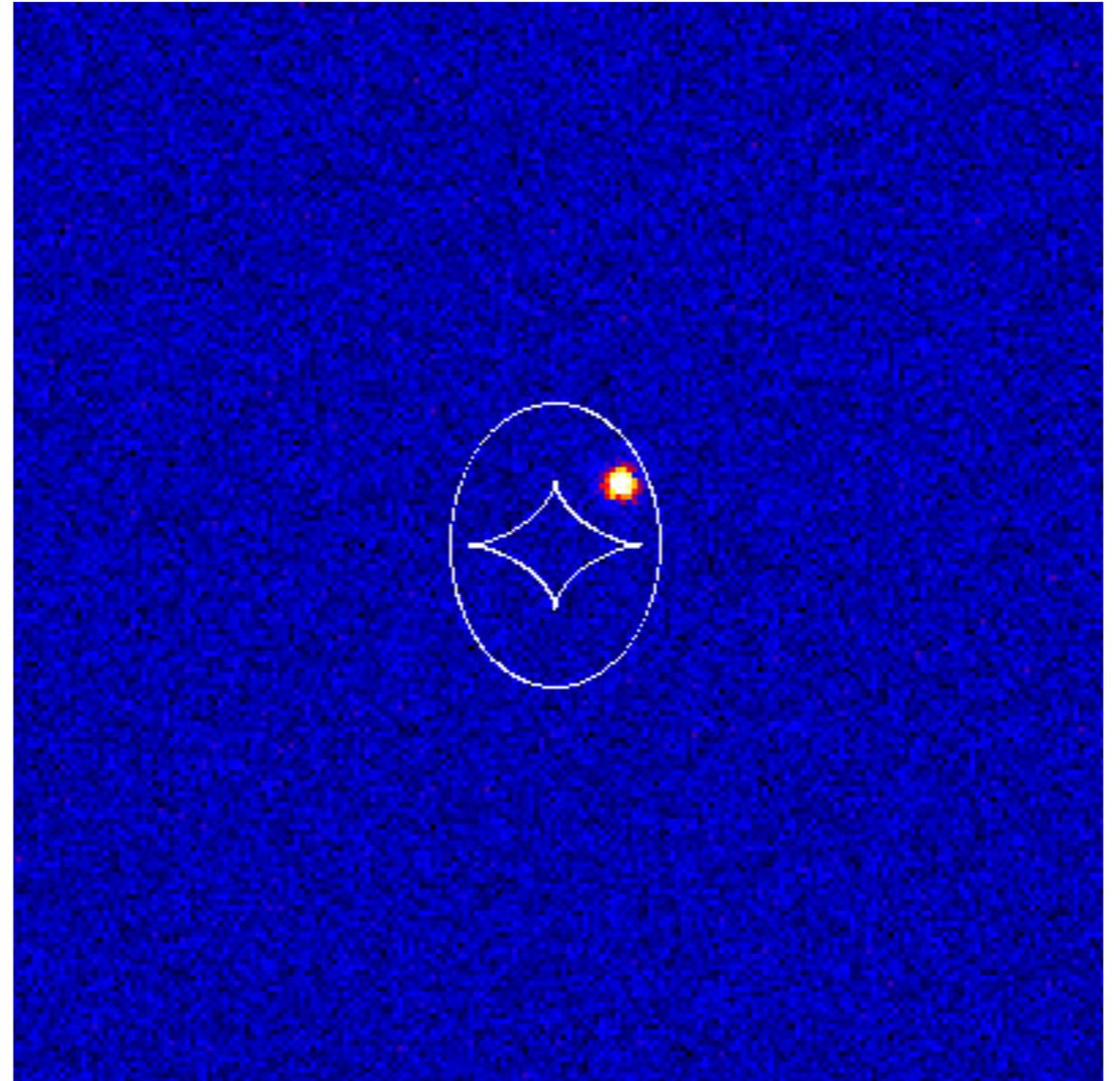


image plane
(critical curves)



source plane
(caustics)

楕円レンズの複数像 (広がったソース)

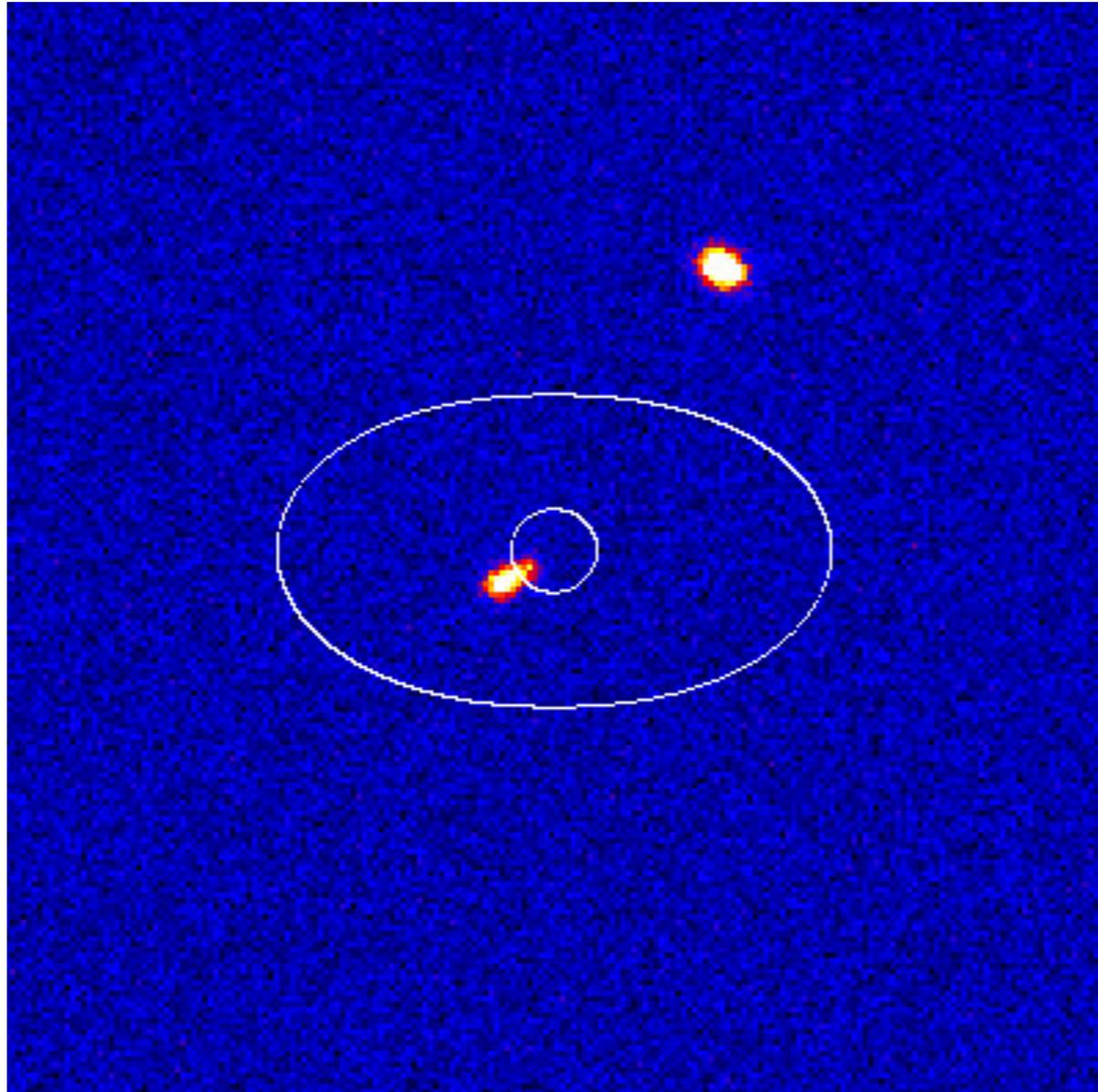
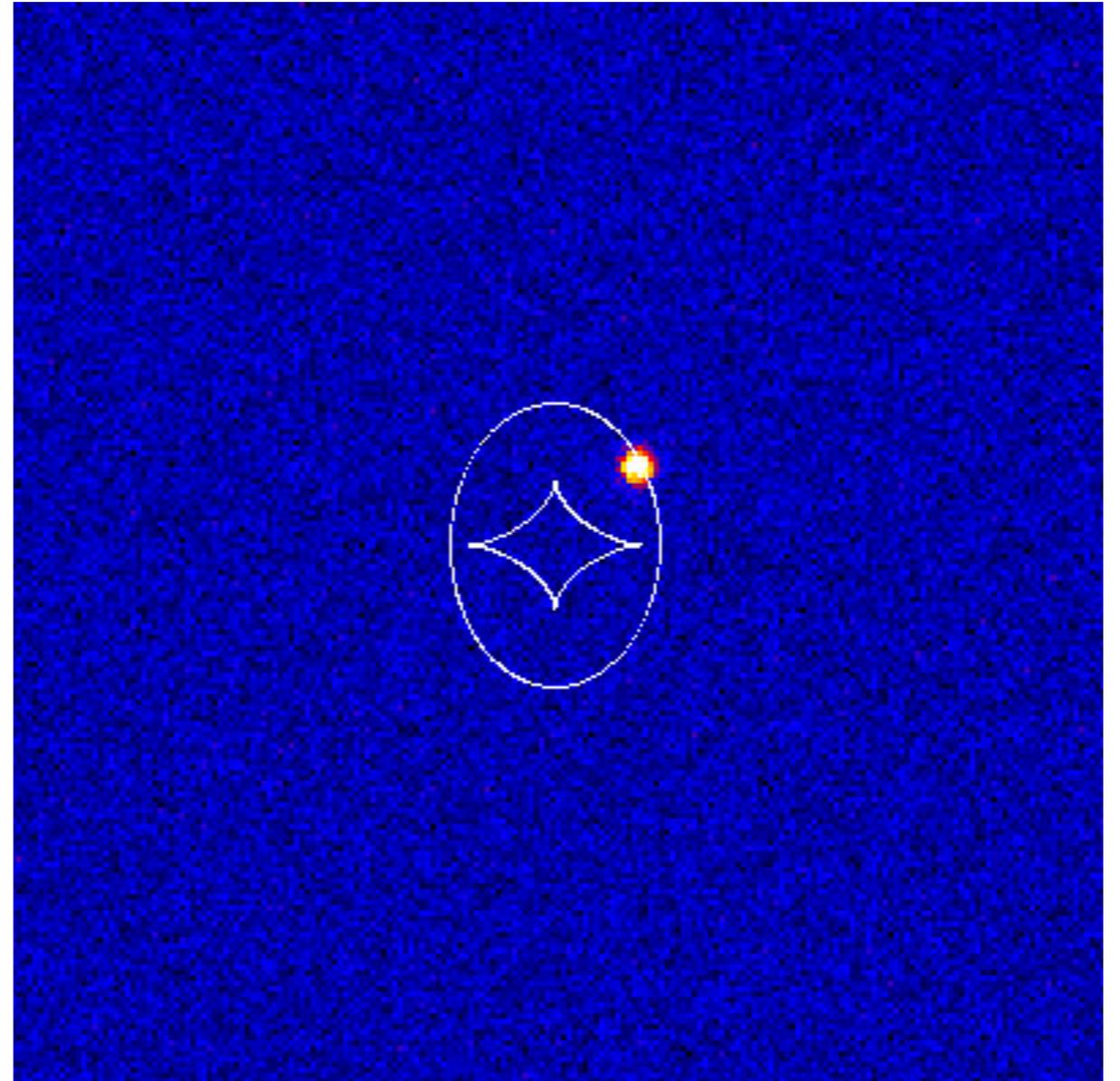


image plane
(critical curves)



source plane
(caustics)

楕円レンズの複数像 (広がったソース)

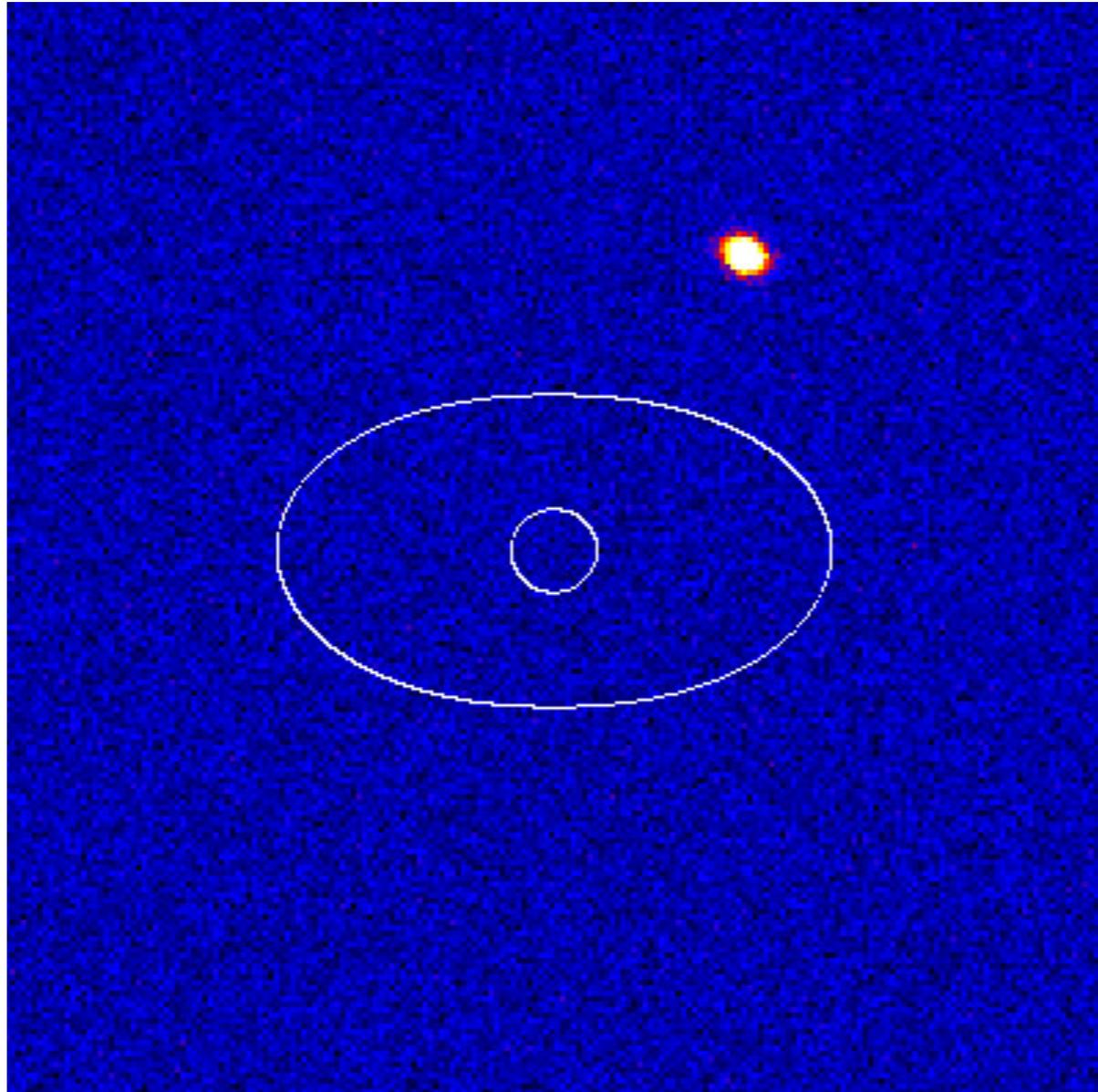
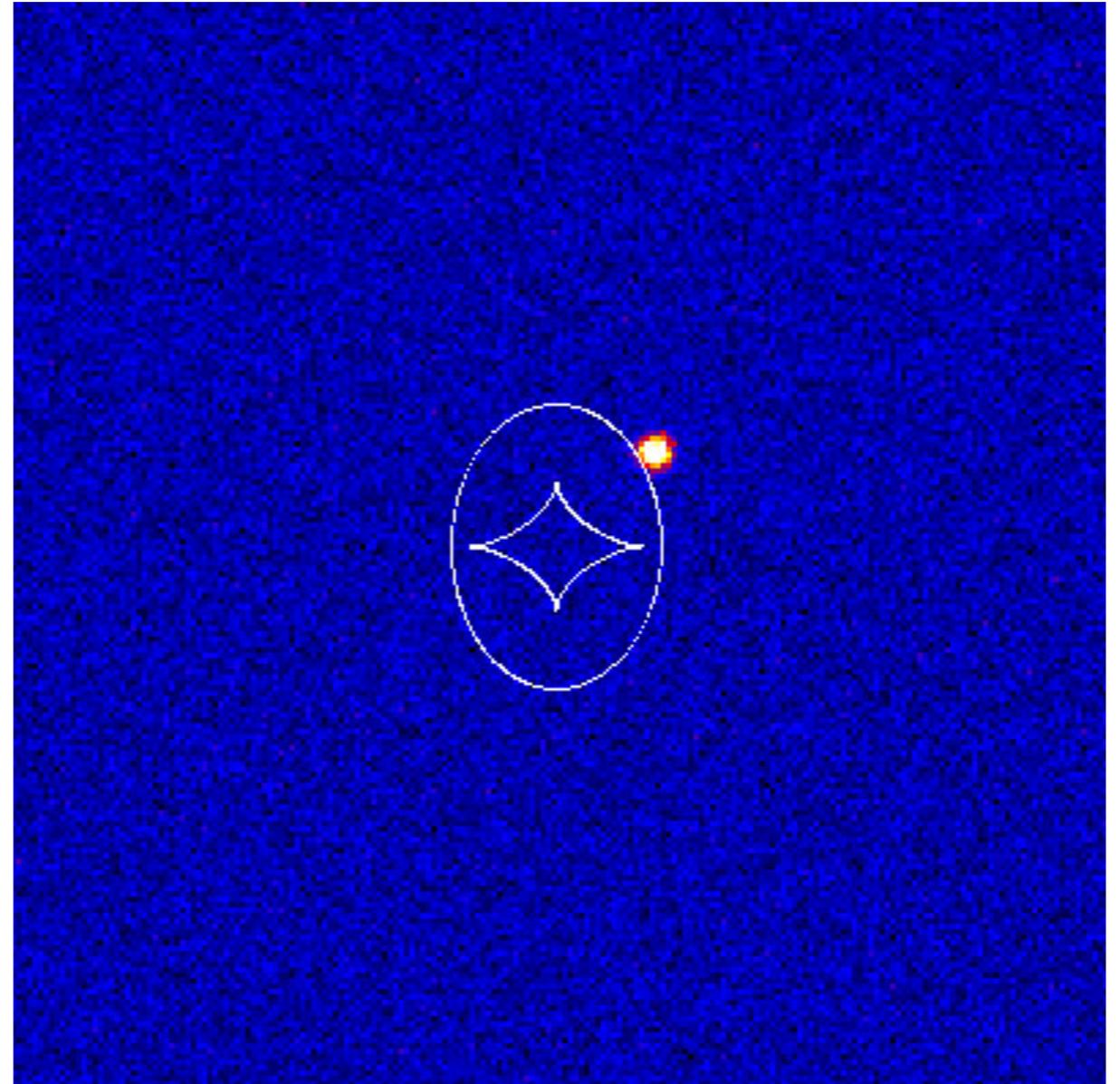


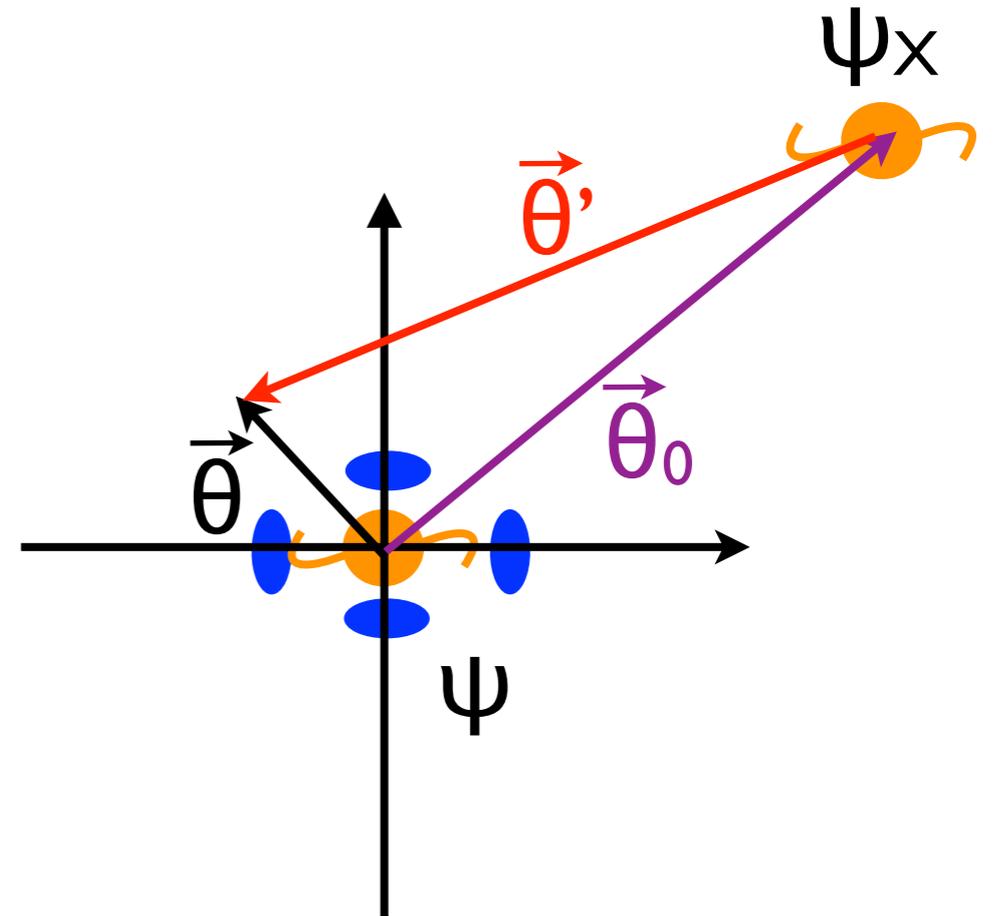
image plane
(critical curves)



source plane
(caustics)

より現実的な質量モデル (II)

- 外部摂動 (external perturbation)
近傍の天体 (X) がレンズ
ポテンシャルに与える影響



$$\psi_X(\vec{\theta}') = \psi_X(\vec{\theta} - \vec{\theta}_0)$$

$$\approx \underbrace{\psi_X(-\vec{\theta}_0)}_{\text{定数}} + \underbrace{\vec{\theta} \cdot \frac{\partial \psi_X}{\partial \vec{\theta}} \Big|_{-\vec{\theta}_0}}_{\text{uniform } \vec{\alpha}} + \frac{1}{2} \underbrace{\vec{\theta} \cdot H[\psi_X(-\vec{\theta}_0)] \cdot \vec{\theta}}_{\text{Hessian matrix}} + \dots$$

$$H[\psi(\theta)] = \begin{pmatrix} \psi_{11} & \psi_{12} \\ \psi_{21} & \psi_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \kappa + \gamma_1 & \gamma_2 \\ \gamma_2 & \kappa - \gamma_1 \end{pmatrix}$$

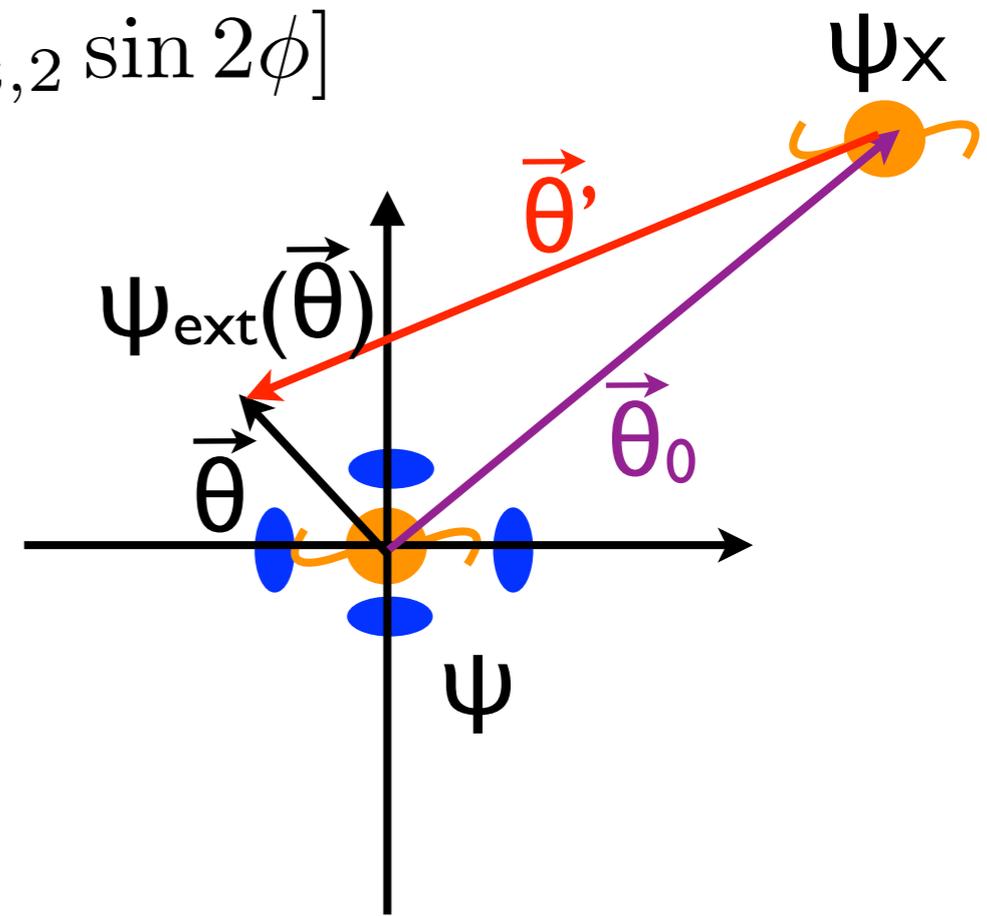
より現実的な質量モデル (III)

- 従って X の $\vec{\theta}$ でのメインポテンシャルの影響 $\psi_{\text{ext}}(\vec{\theta}) = \psi_X(\vec{\theta}')$ は

[極座標 $(\theta_1, \theta_2) = (\theta \cos \phi, \theta \sin \phi)$]

$$\begin{aligned}\psi_{\text{ext}}(\vec{\theta}) &\approx \frac{\theta^2}{2} [\kappa_{\text{ext}} + \gamma_{\text{ext},1} \cos 2\phi + \gamma_{\text{ext},2} \sin 2\phi] \\ &\approx \frac{\theta^2}{2} [\kappa_{\text{ext}} + \gamma_{\text{ext}} \cos 2(\phi - \phi_0)]\end{aligned}$$

(ϕ_0 : 摂動天体 X の方向に対応する方位角)



数値的手法

- 一般にレンズ方程式を解析的に解くのは困難

$$\vec{\beta} = \vec{\theta} - \vec{\alpha}(\vec{\theta})$$

($\vec{\beta} \rightarrow \vec{\theta}$ は非線形、複数の解が許される)

- 数値的にレンズ方程式を解くことが必要

数値的な解の探索

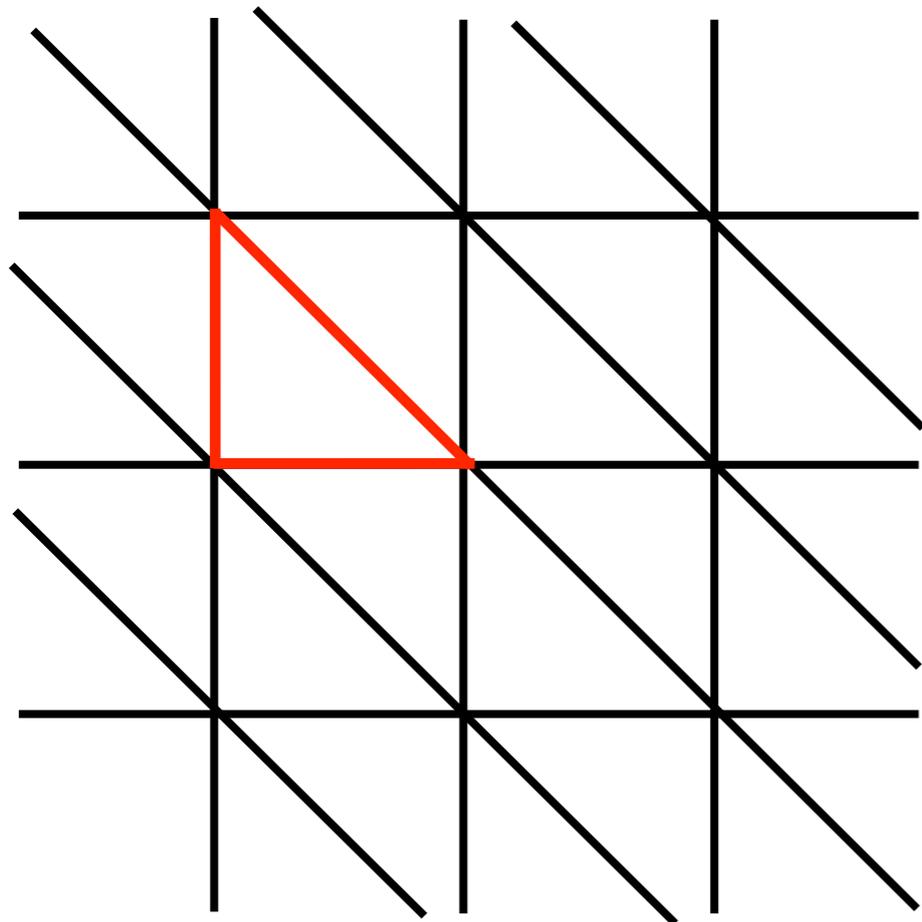
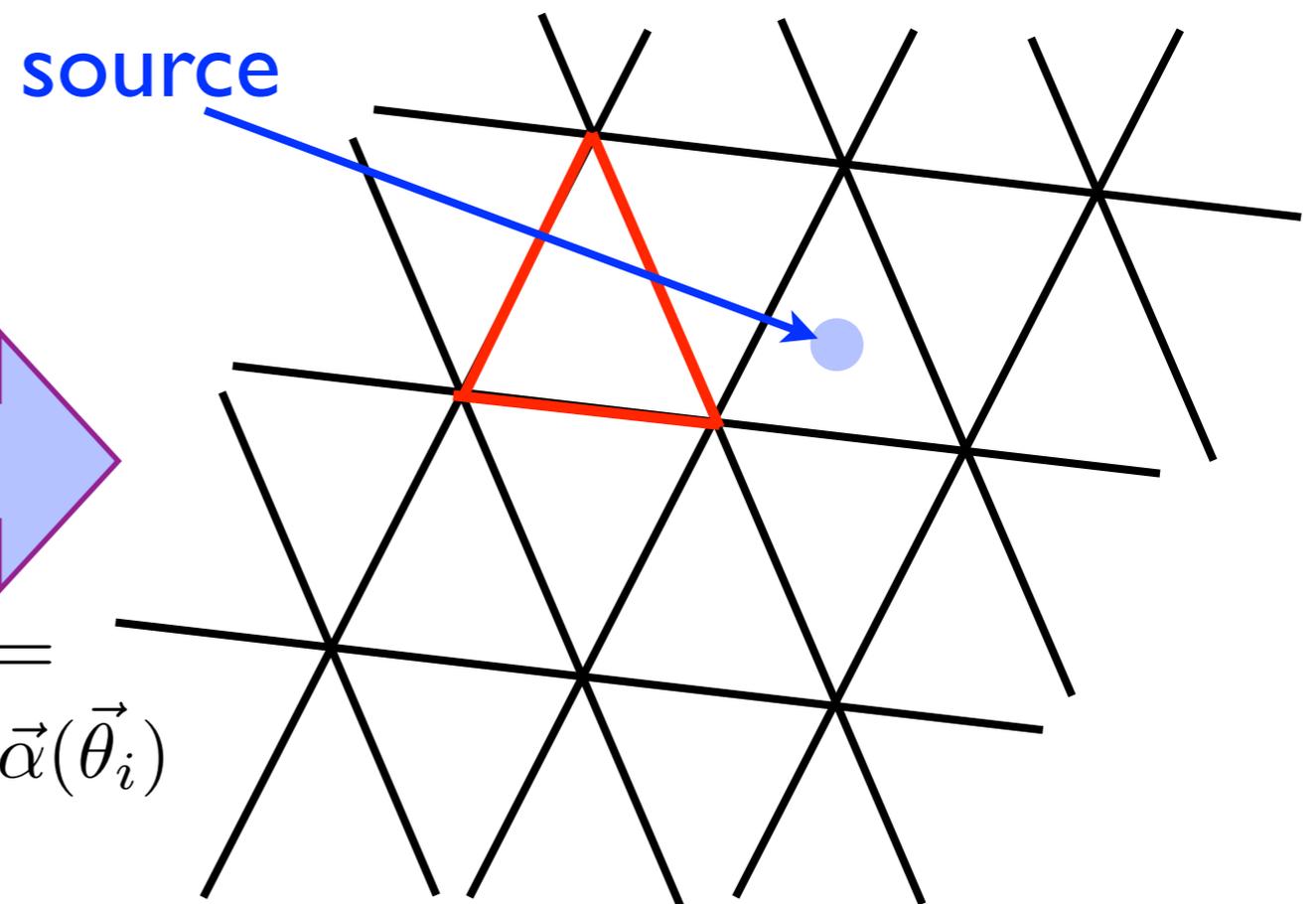


image plane ($\vec{\theta}_i$)

→
$$\vec{\beta}_i = \vec{\theta}_i - \vec{\alpha}(\vec{\theta}_i)$$



source plane ($\vec{\beta}_i$)

数値的な解の探索

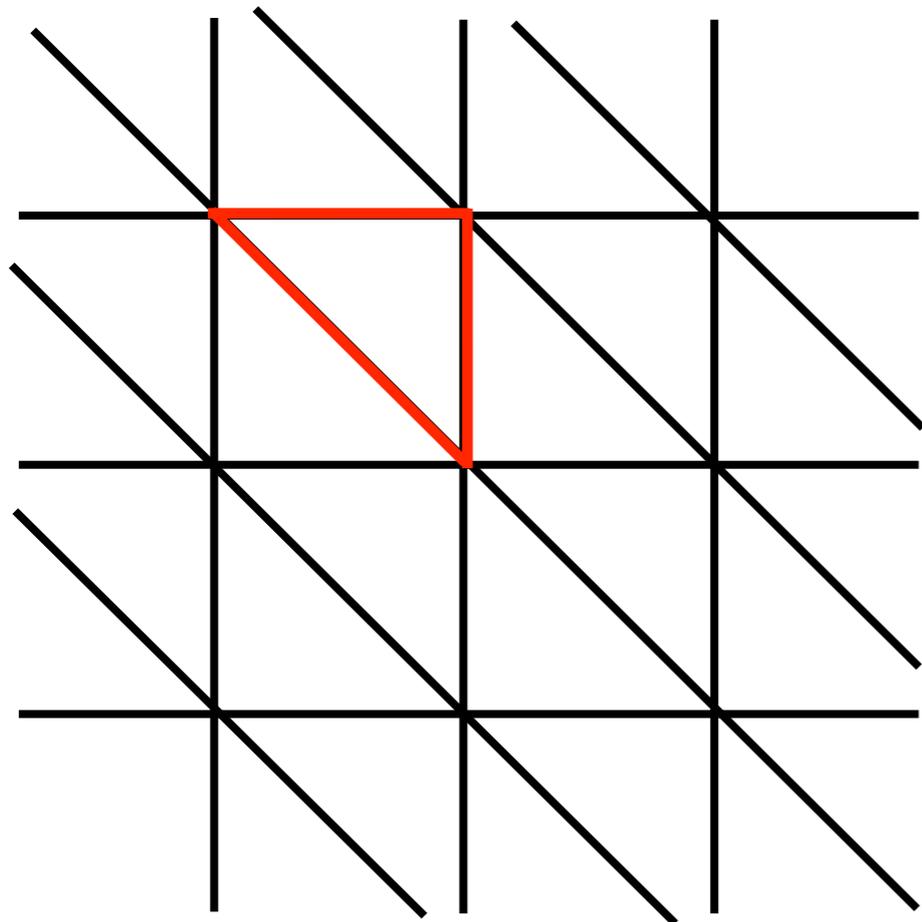
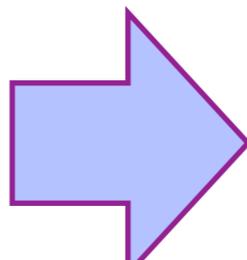
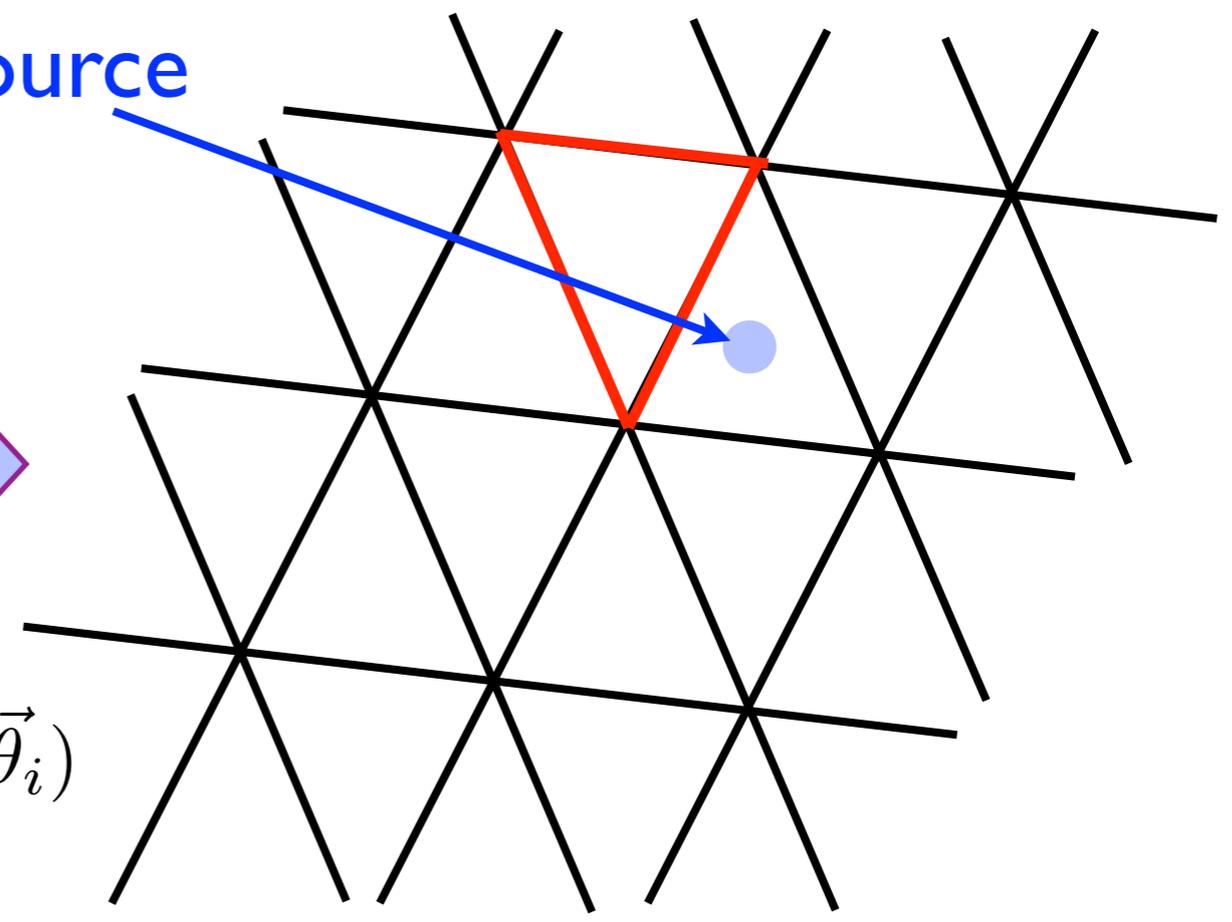


image plane ($\vec{\theta}_i$)

source


$$\vec{\beta}_i = \vec{\theta}_i - \vec{\alpha}(\vec{\theta}_i)$$



source plane ($\vec{\beta}_i$)

数値的な解の探索

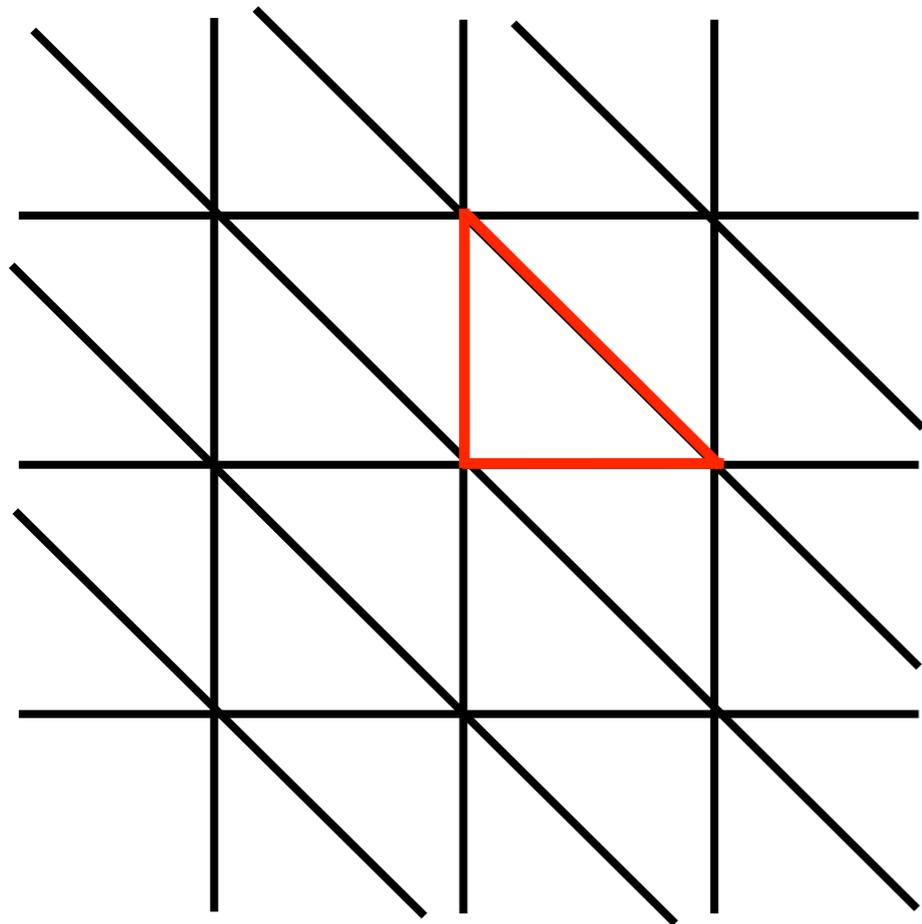
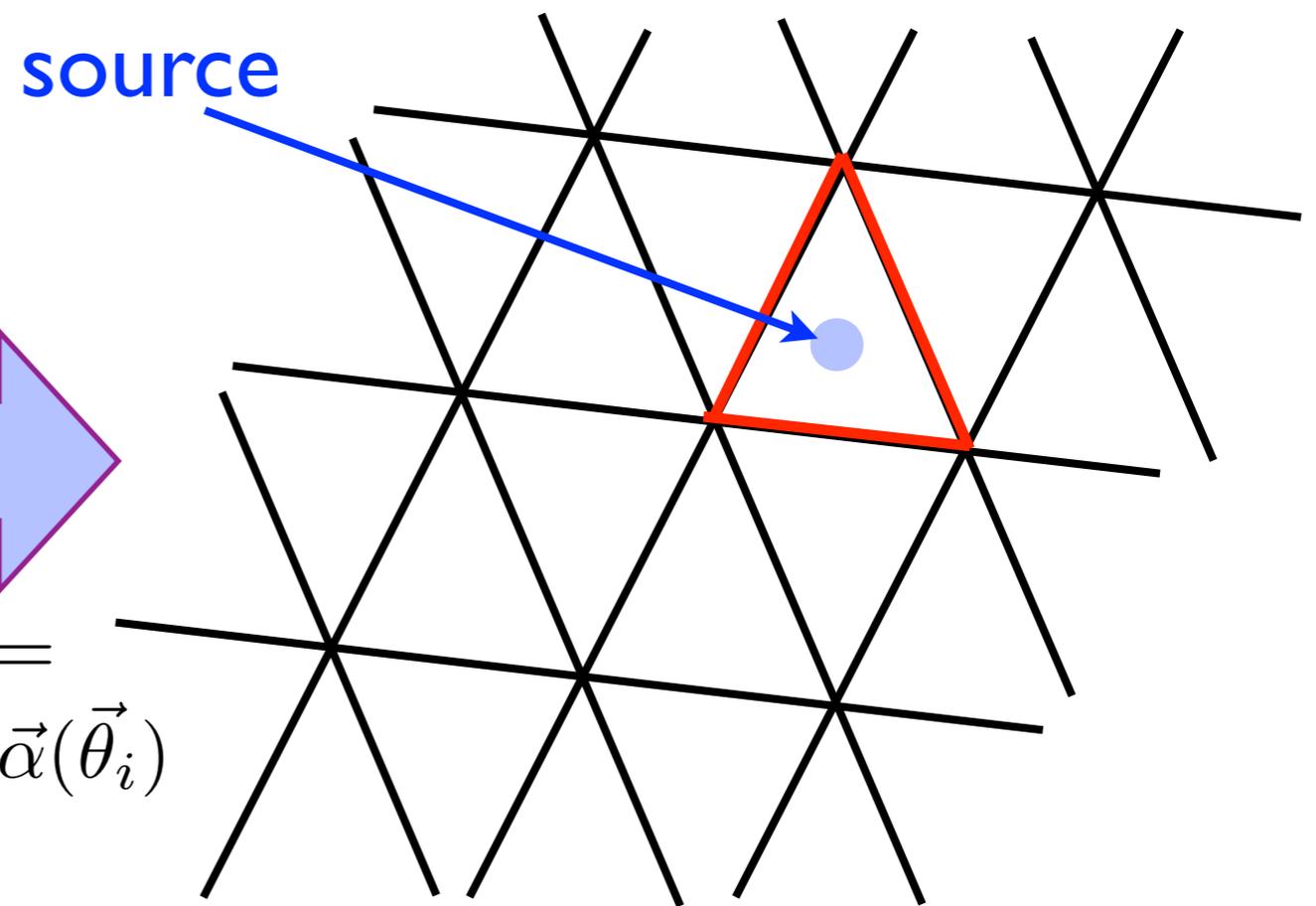


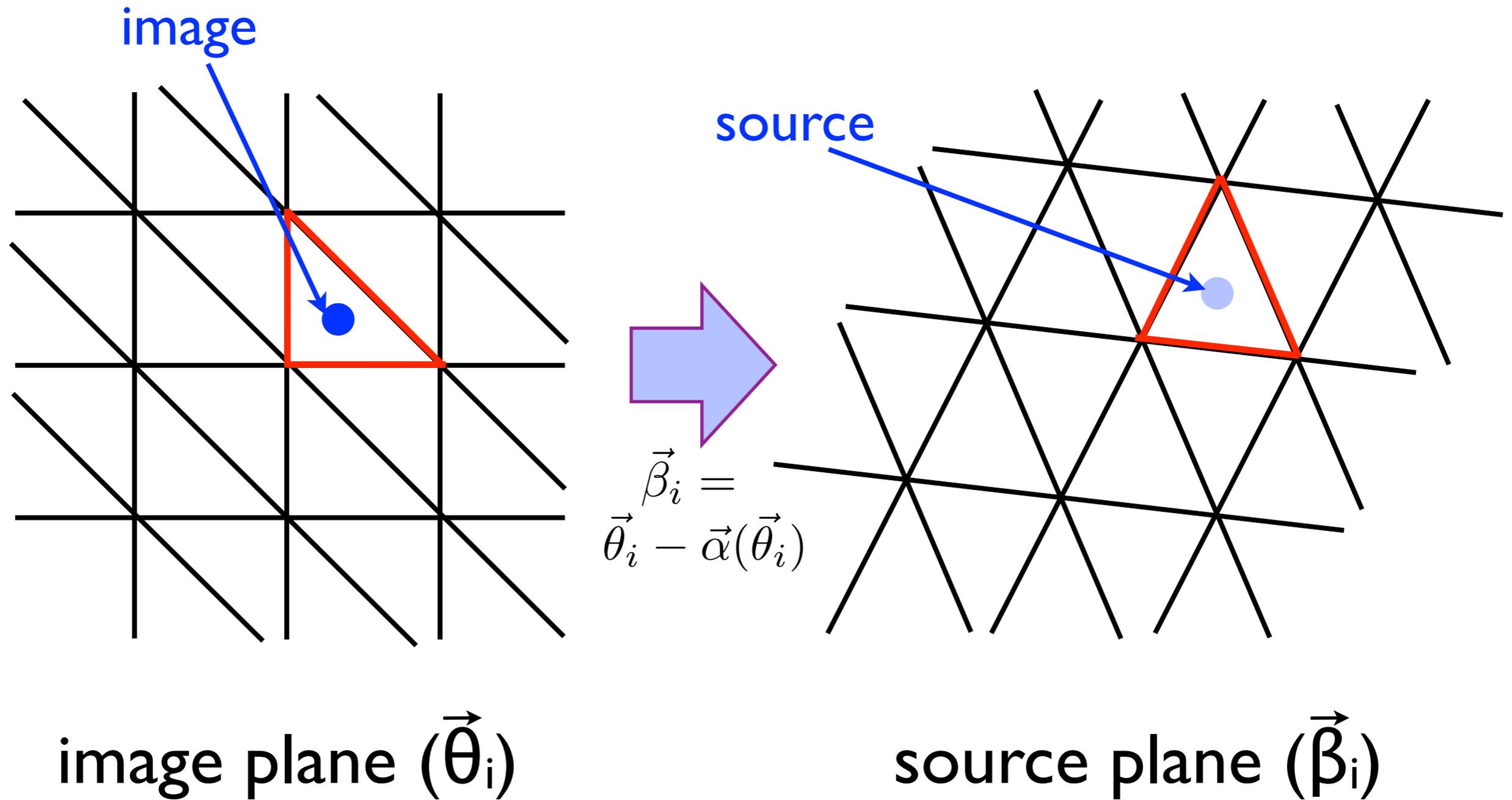
image plane ($\vec{\theta}_i$)

→
$$\vec{\beta}_i = \vec{\theta}_i - \vec{\alpha}(\vec{\theta}_i)$$



source plane ($\vec{\beta}_i$)

数値的な解の探索



分解能の問題

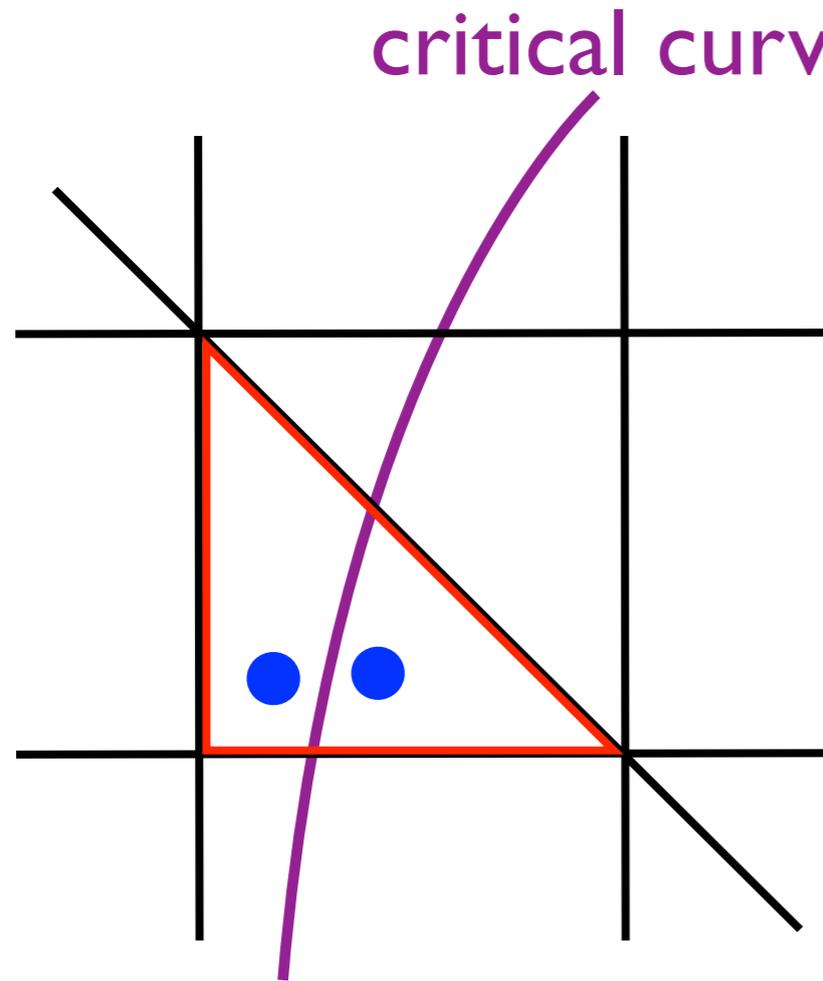


image plane ($\vec{\theta}_i$)

複数像を分解
できていない

⇒
グリッドを
細かく

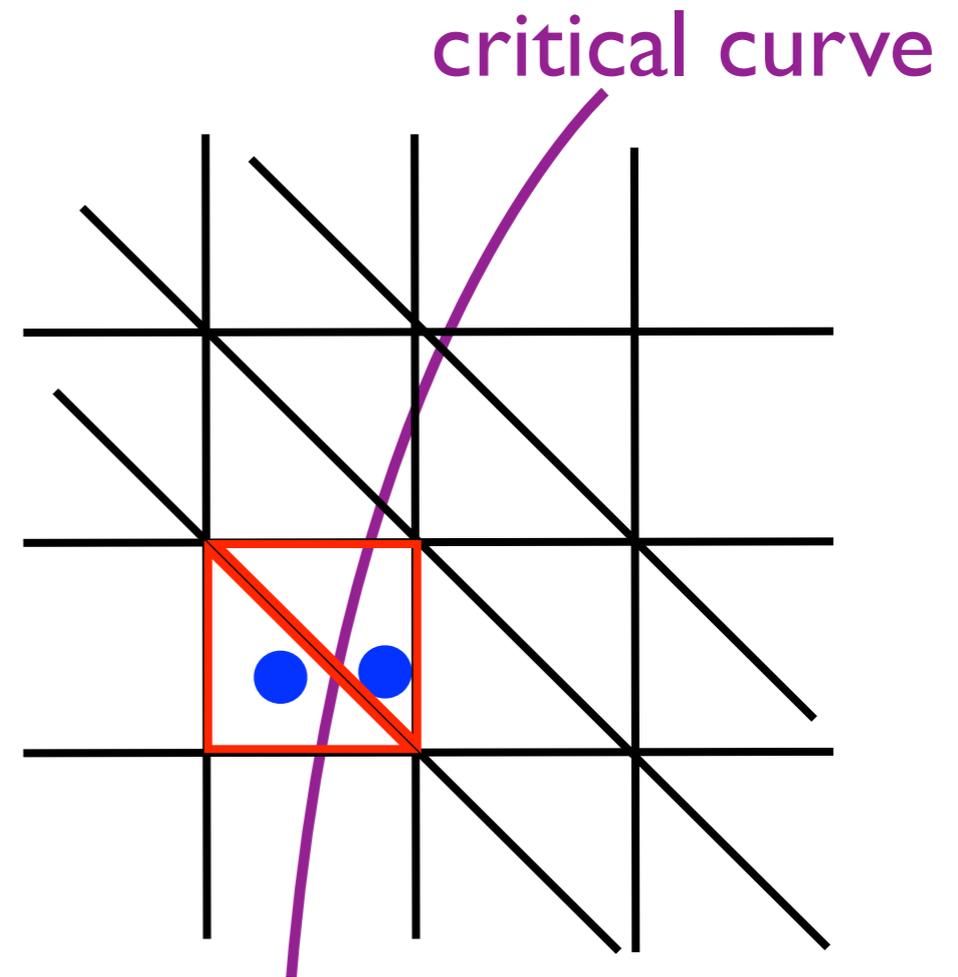
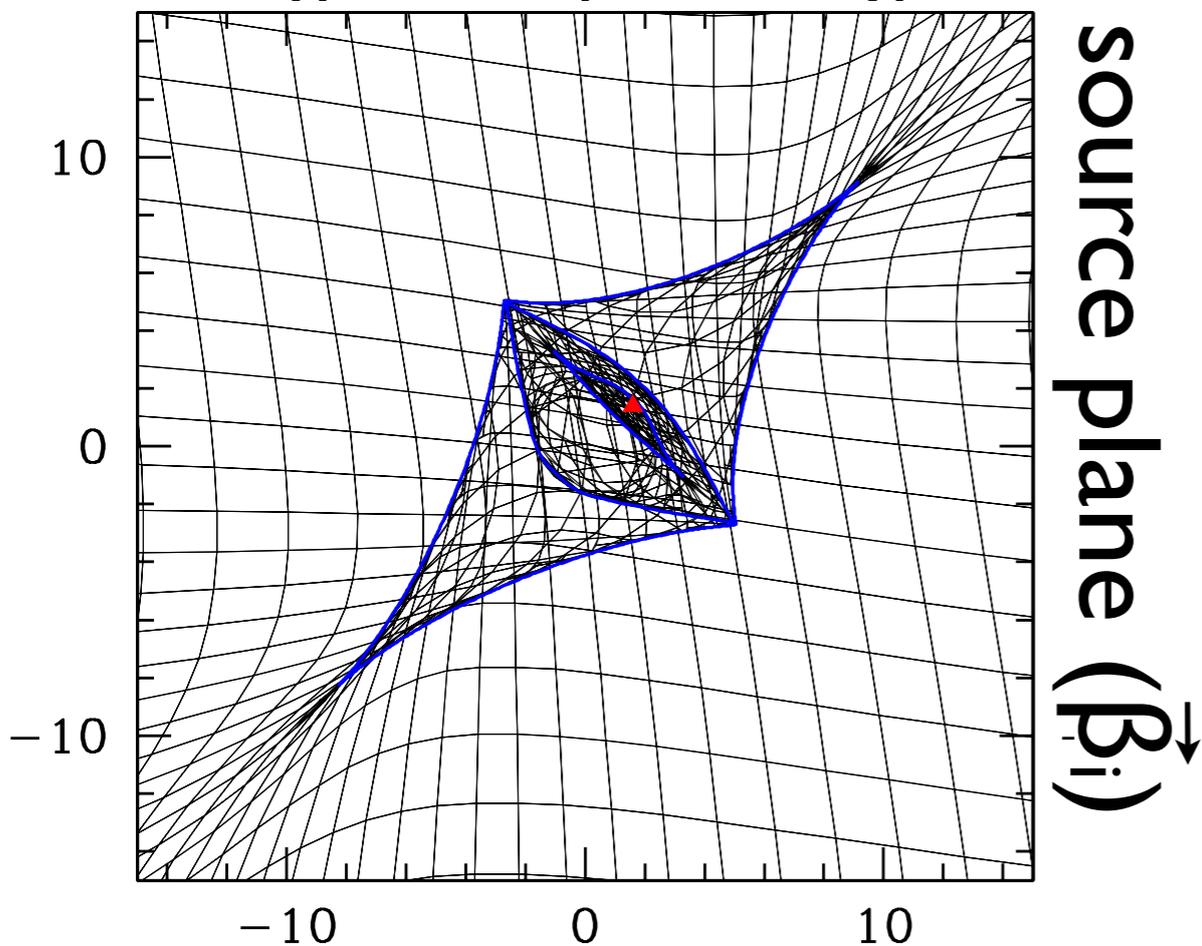
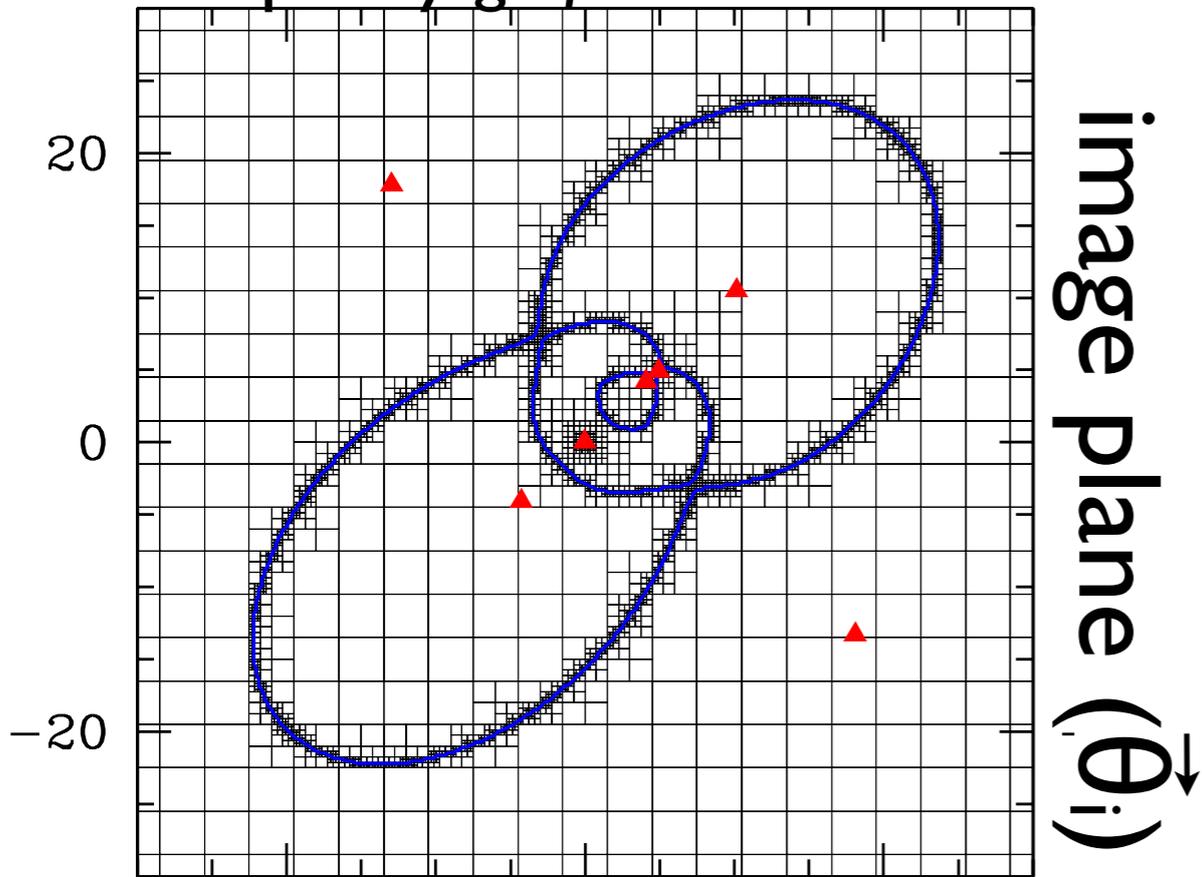


image plane ($\vec{\theta}_i$)

複数像を分解
できている

example by glafic



現実の場合

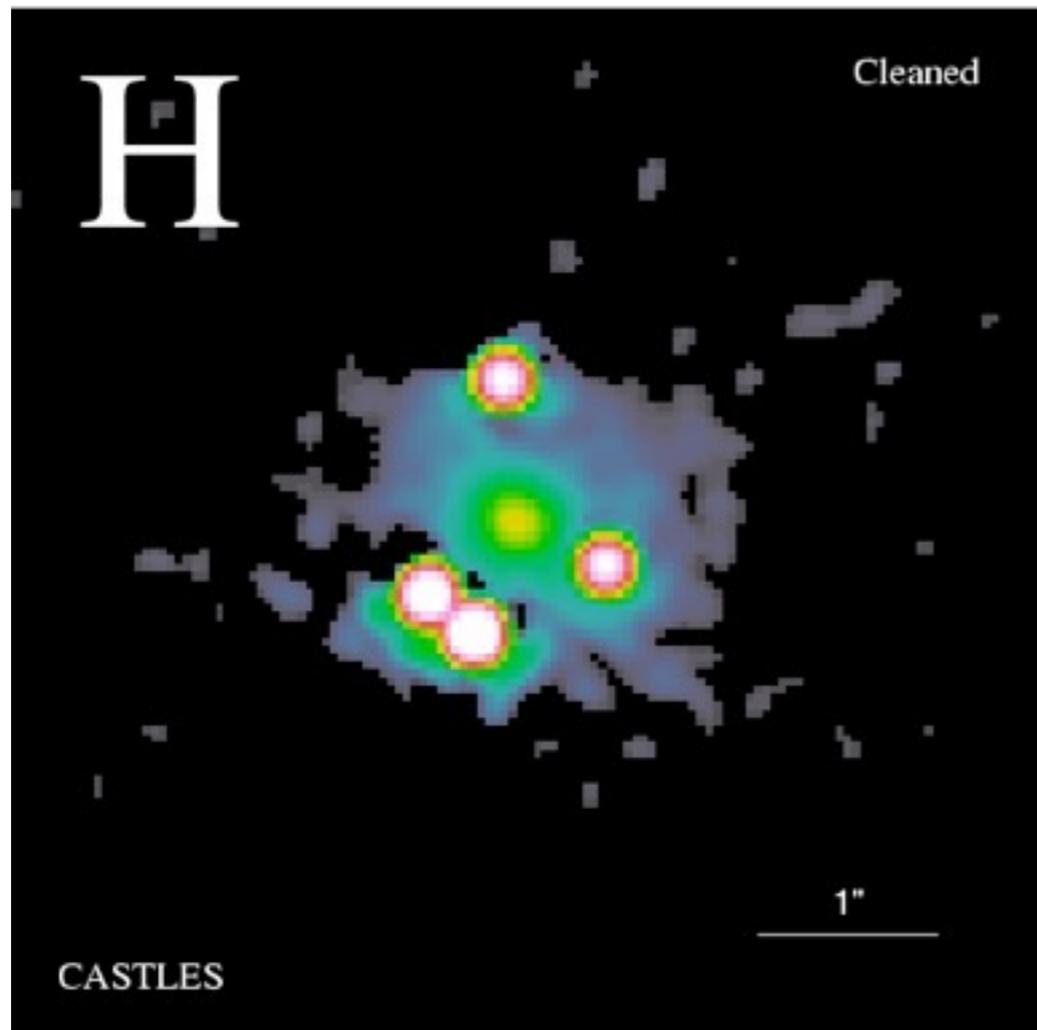
- 高いグリッド分解能は critical curve 近傍でのみ必要となる
- **適合格子 (adaptive grid)** を使うことで効率的に レンズ方程式を解ける
- 左の例では7つの複数像をうまく分離して求めることができる

重力レンズ解析公開ソフトウェア

- いくつか公開されているソフトウェアあり
 - *glafic* (M. Oguri)
<http://www.slac.stanford.edu/~oguri/glafic/>
 - *GRAVLENS* (C. R. Keeton)
<http://www.physics.rutgers.edu/~keeton/gravlens/>
 - *LENSTOOL* (E. Jullo, J.-P. Kneib, et al.)
<https://projets.lam.fr/projects/lenstool/wiki/>
 -
- Lefor et al. (arXiv:1206.4382) のレビューも参照

質量モデリングの例 (I)

- 例: WFI2626-4536 (Morgan et al. 2004)



四重像重力レンズ
 $z=2.23$ のソースクエーサー
 $z\sim 0.4$ のレンズ銀河

(HST image from CASTLES website)

質量モデリングの例 (II)

- 楕円等温球 (Singular Isothermal Ellipsoid; SIE) と外部摂動 (external shear) を仮定
- モデルパラメータ = 9
(速度分散, レンズ中心, e , PA_e , γ_{ext} , PA_γ , $\vec{\beta}$)
- 観測量 = 13
(像の位置 $\times 4$, 銀河の位置, フラックス比 $\times 3$)
- フィッティングの自由度 = $13 - 9 = 4$

質量モデリングの例 (III)

- χ^2 最小化によりベストフィットモデル探索

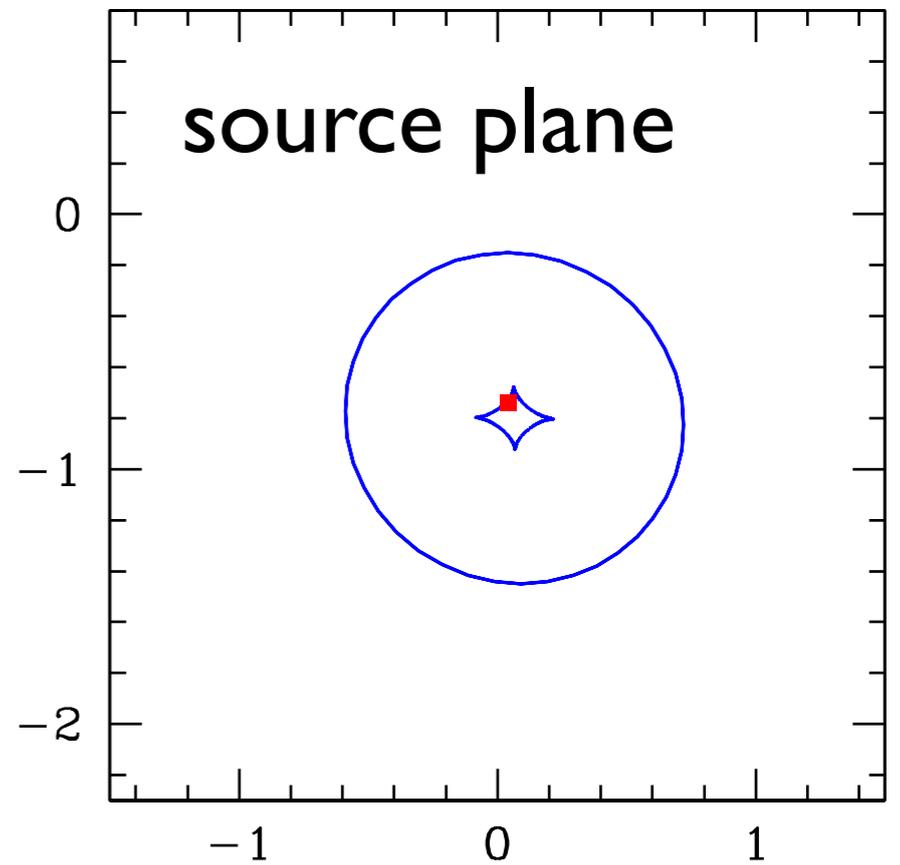
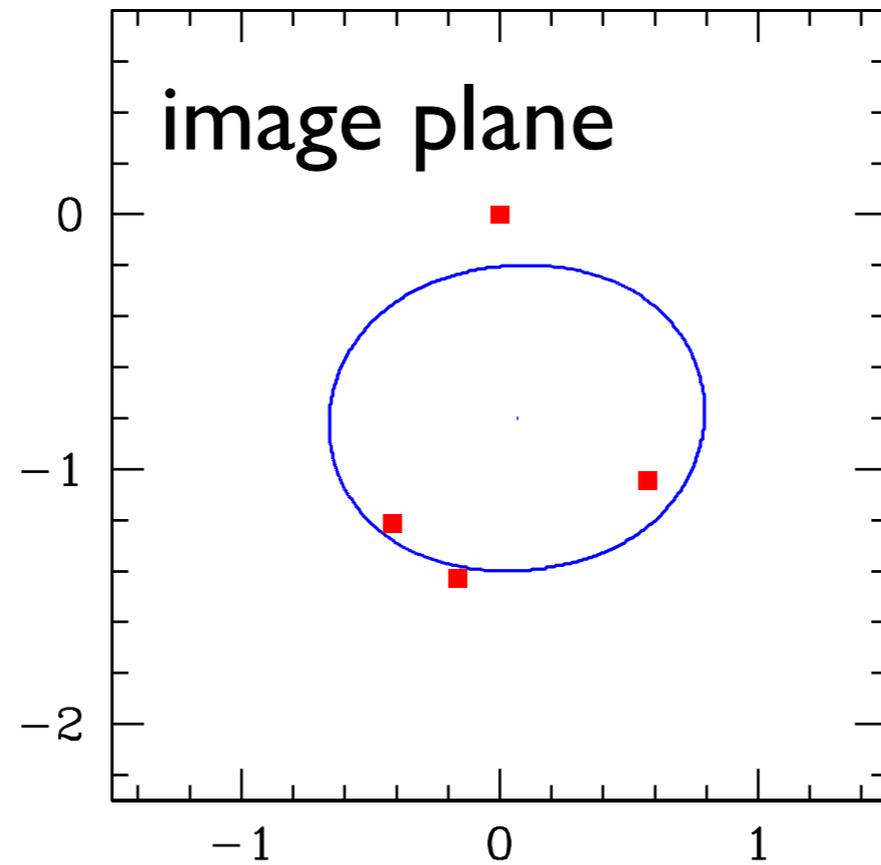
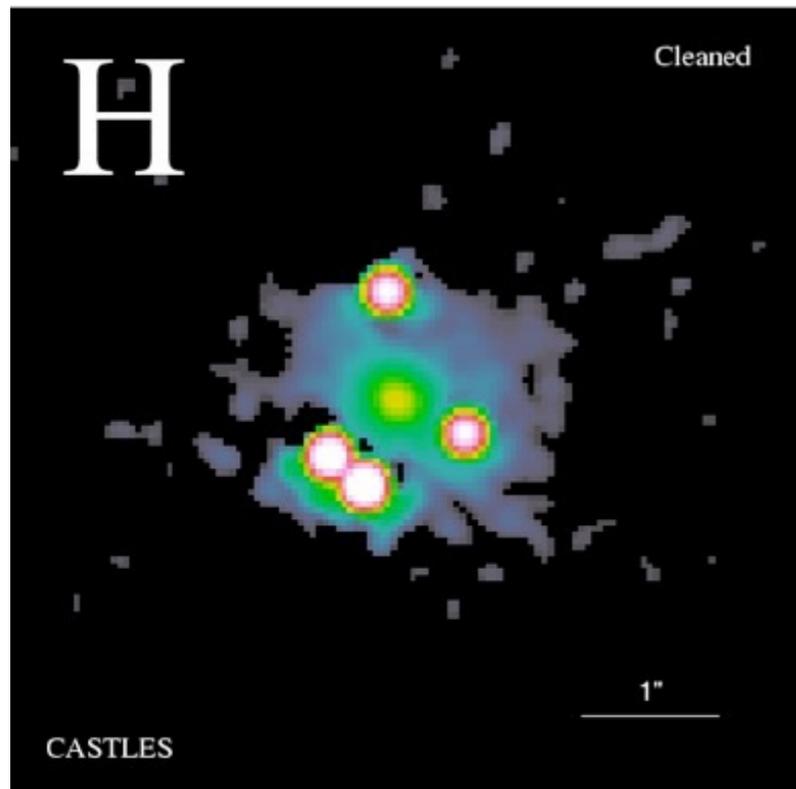
$$\chi^2 = \sum_i \frac{|\vec{\theta}_{i,\text{model}} - \vec{\theta}_{i,\text{obs}}|^2}{\sigma_{\theta_i}^2} + \sum_{ij} \frac{(\Delta m_{ij,\text{model}} - \Delta m_{ij,\text{obs}})^2}{\sigma_{\Delta m_{ij}}^2}$$

- [トリック] ソース平面での χ^2 最小化

$$\vec{\theta}_{i,\text{model}} - \vec{\theta}_{i,\text{obs}} \approx A^{-1}(\vec{\theta}_{i,\text{obs}}) \left[\vec{\beta}_{\text{model}} - \vec{\beta}(\vec{\theta}_{i,\text{obs}}) \right]$$

ずっと速い計算が可能だが、複数像の数が違うこともある (クロスチェックが必要)

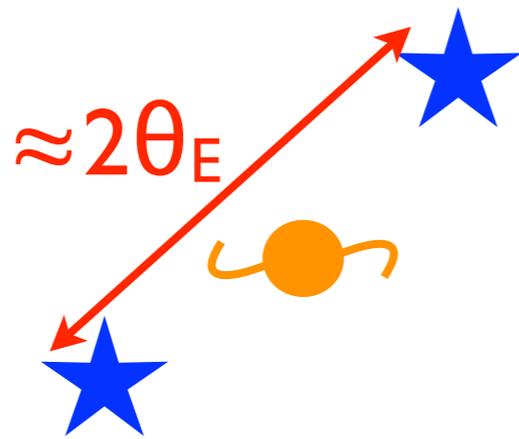
質量モデリングの例 (IV)



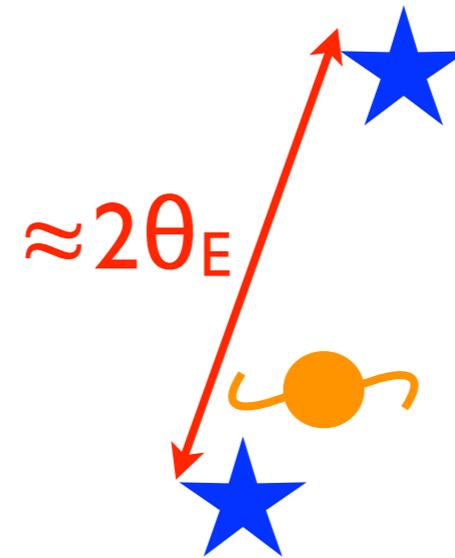
- *glafic* を使って得られた結果
- ベストフィットモデル $\chi^2/\text{d.o.f} = 6.4/4$

強い重力レンズで何がわかるか? (I)

- 複数像間の分離角 $\approx 2\theta_E$



「対称的」
な像の配置



「非対称的」
な像の配置

- 従って複数像の観測によりアインシュタイン半径 θ_E が精度よく測定できる

像の分離角とアインシュタイン半径

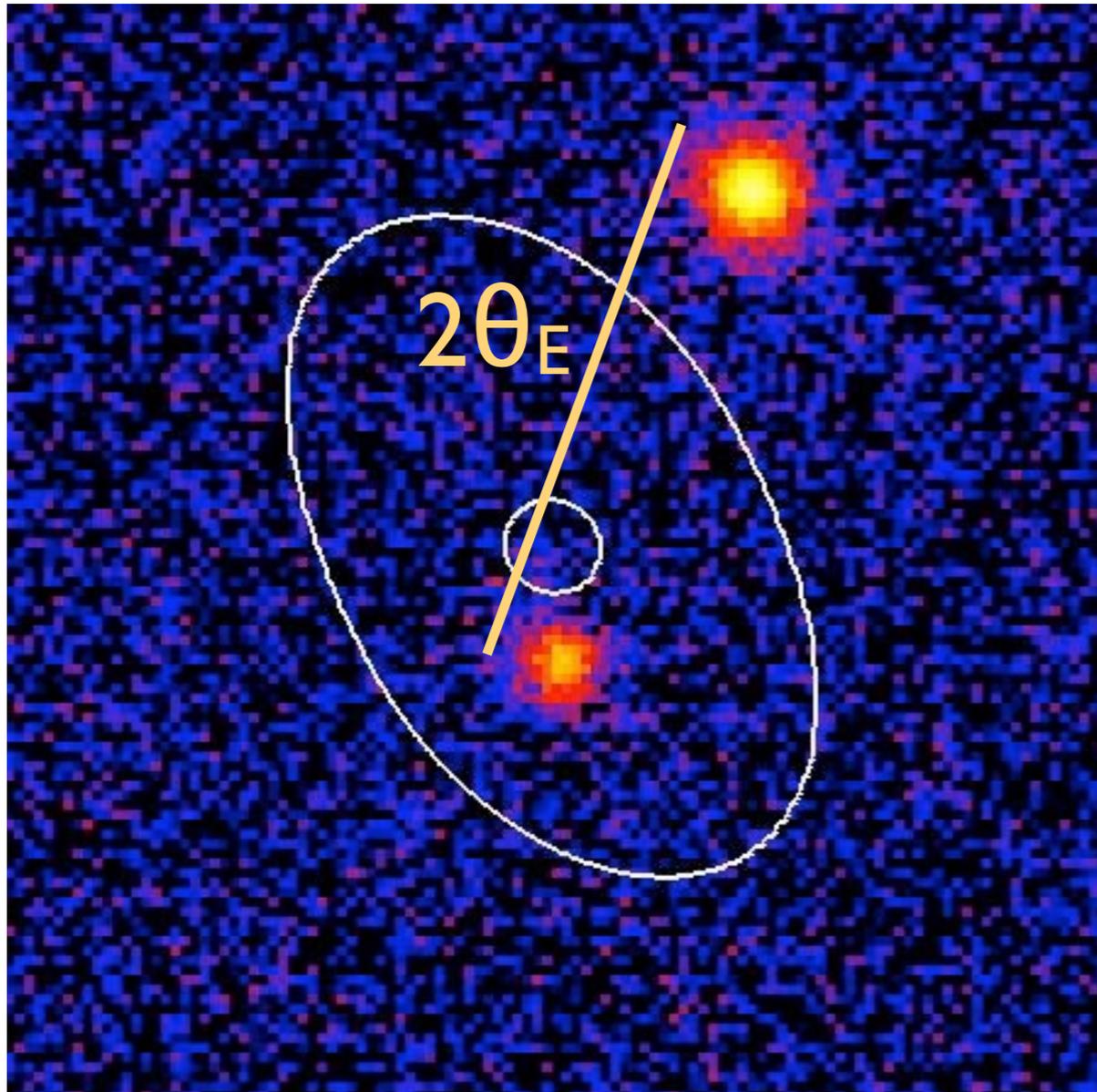
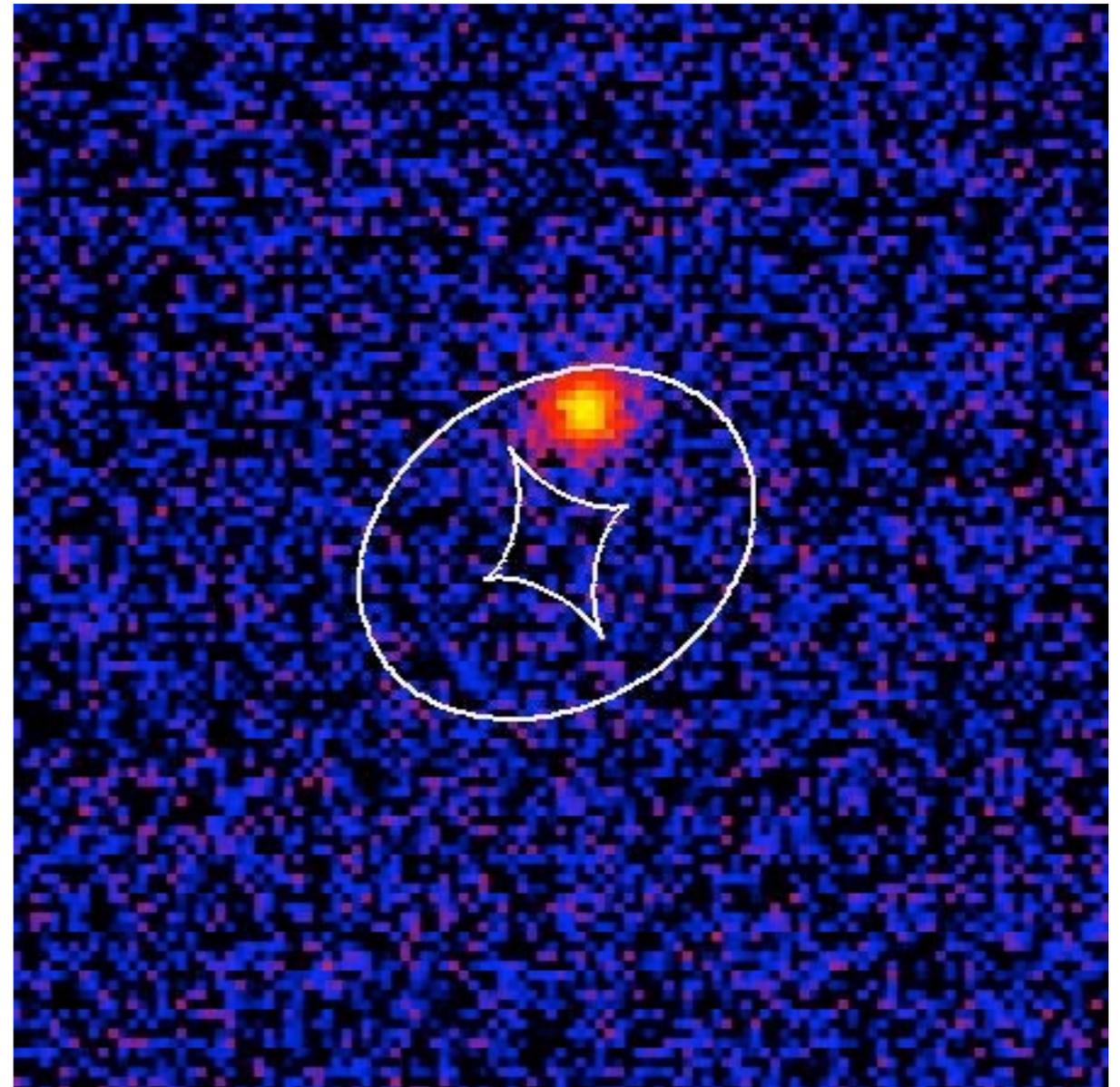


image plane
(critical curves)



source plane
(caustics)

像の分離角とアインシュタイン半径

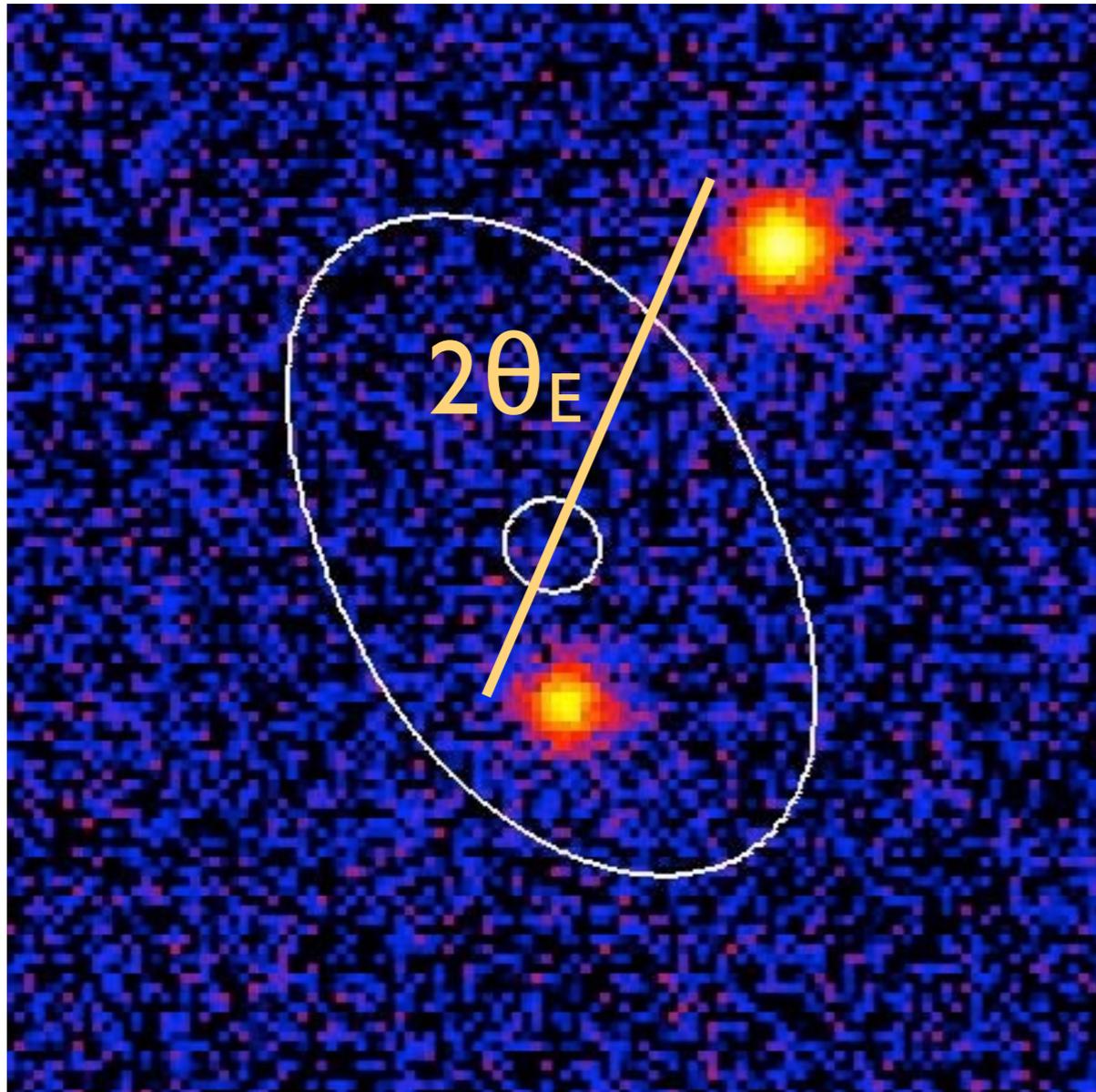
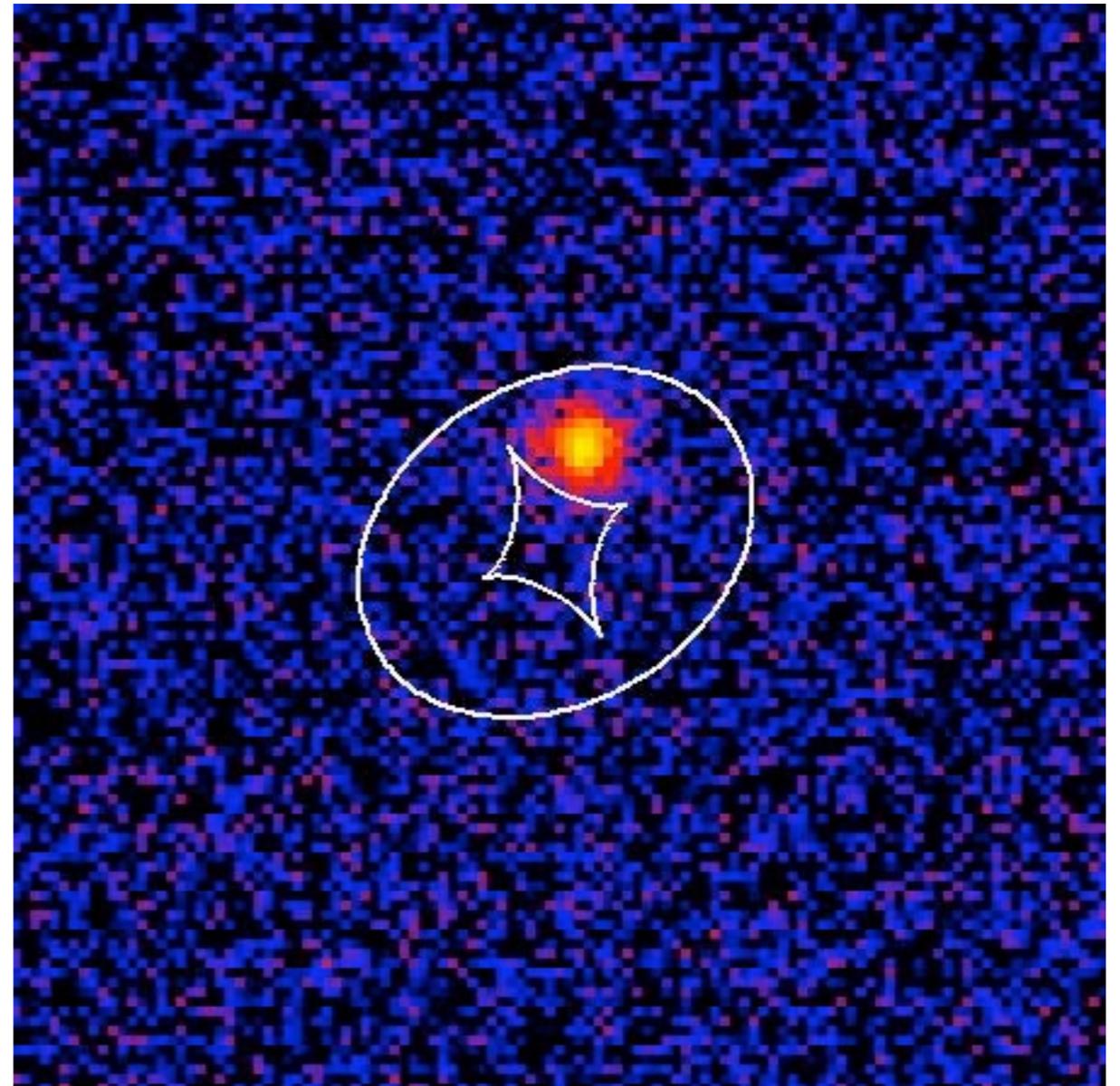


image plane
(critical curves)



source plane
(caustics)

像の分離角とアインシュタイン半径

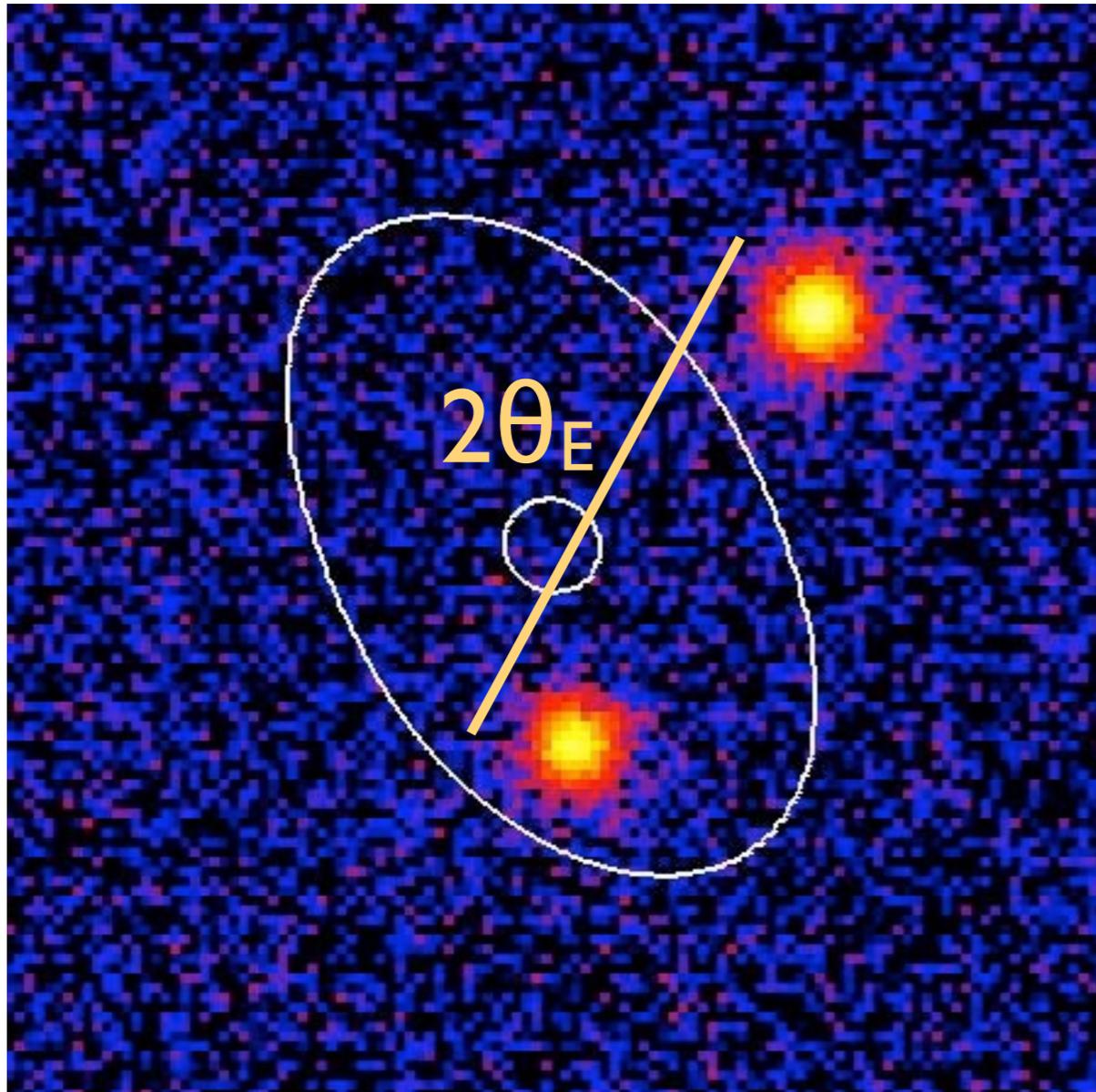
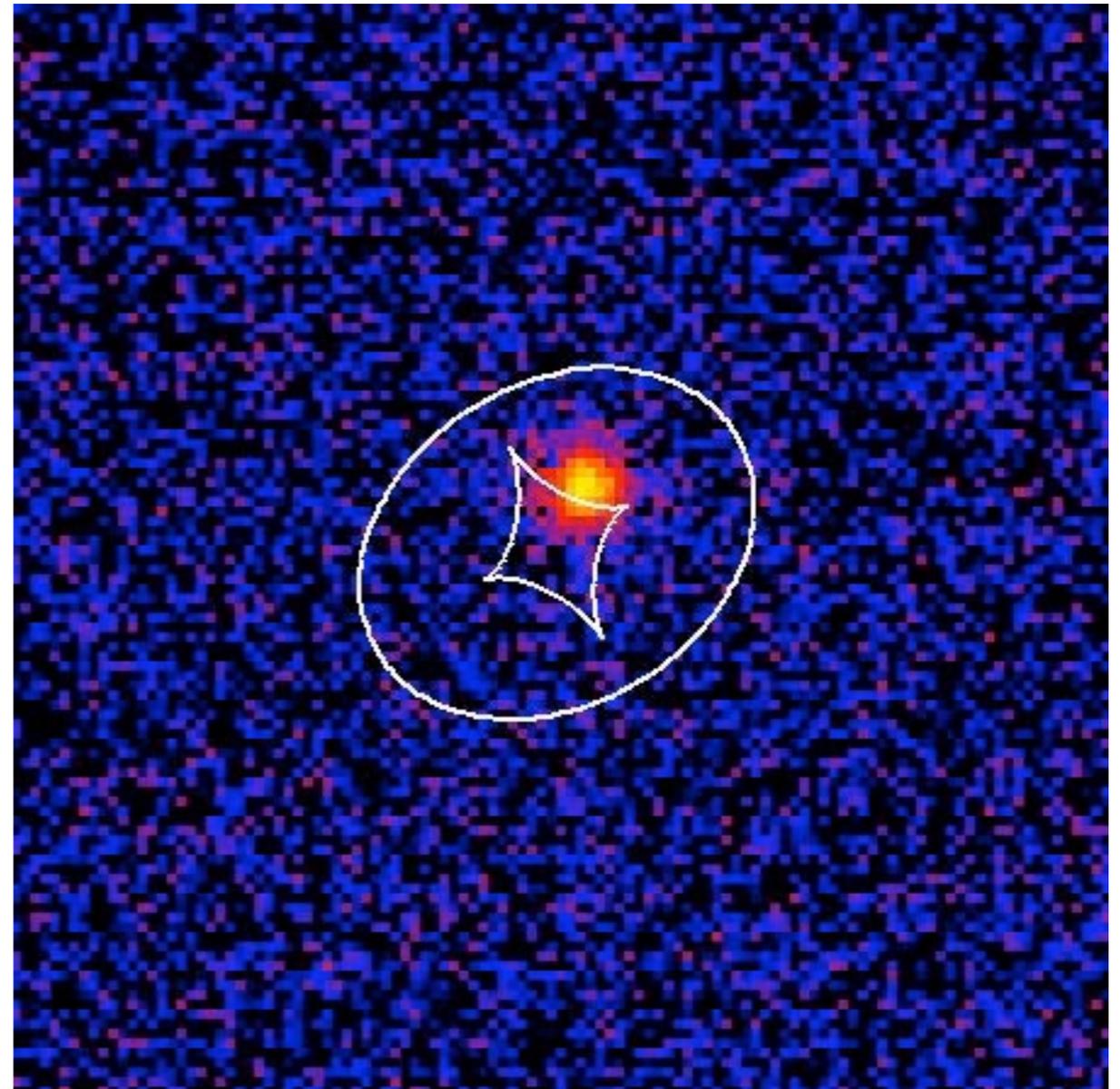


image plane
(critical curves)



source plane
(caustics)

像の分離角とアインシュタイン半径

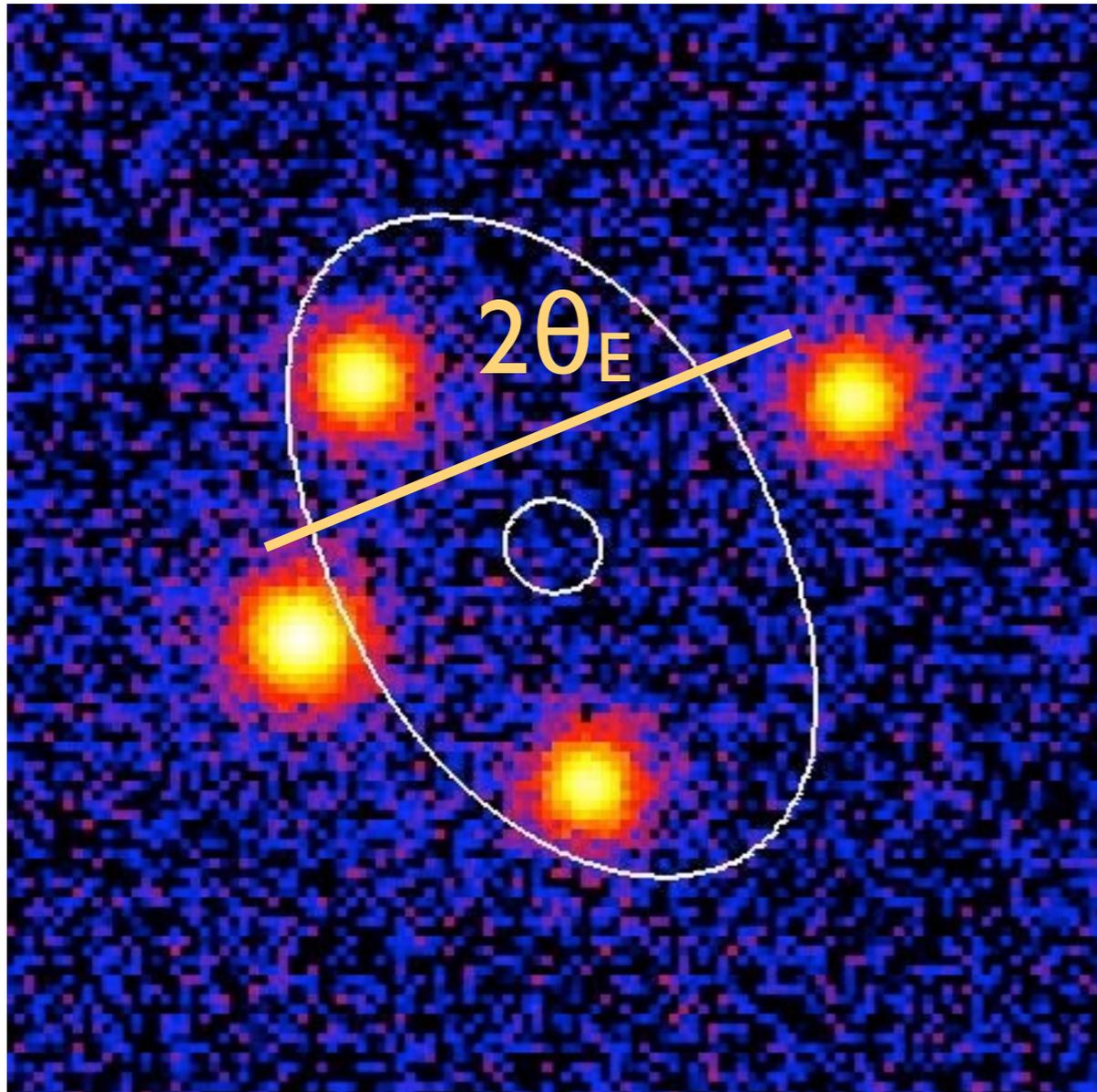
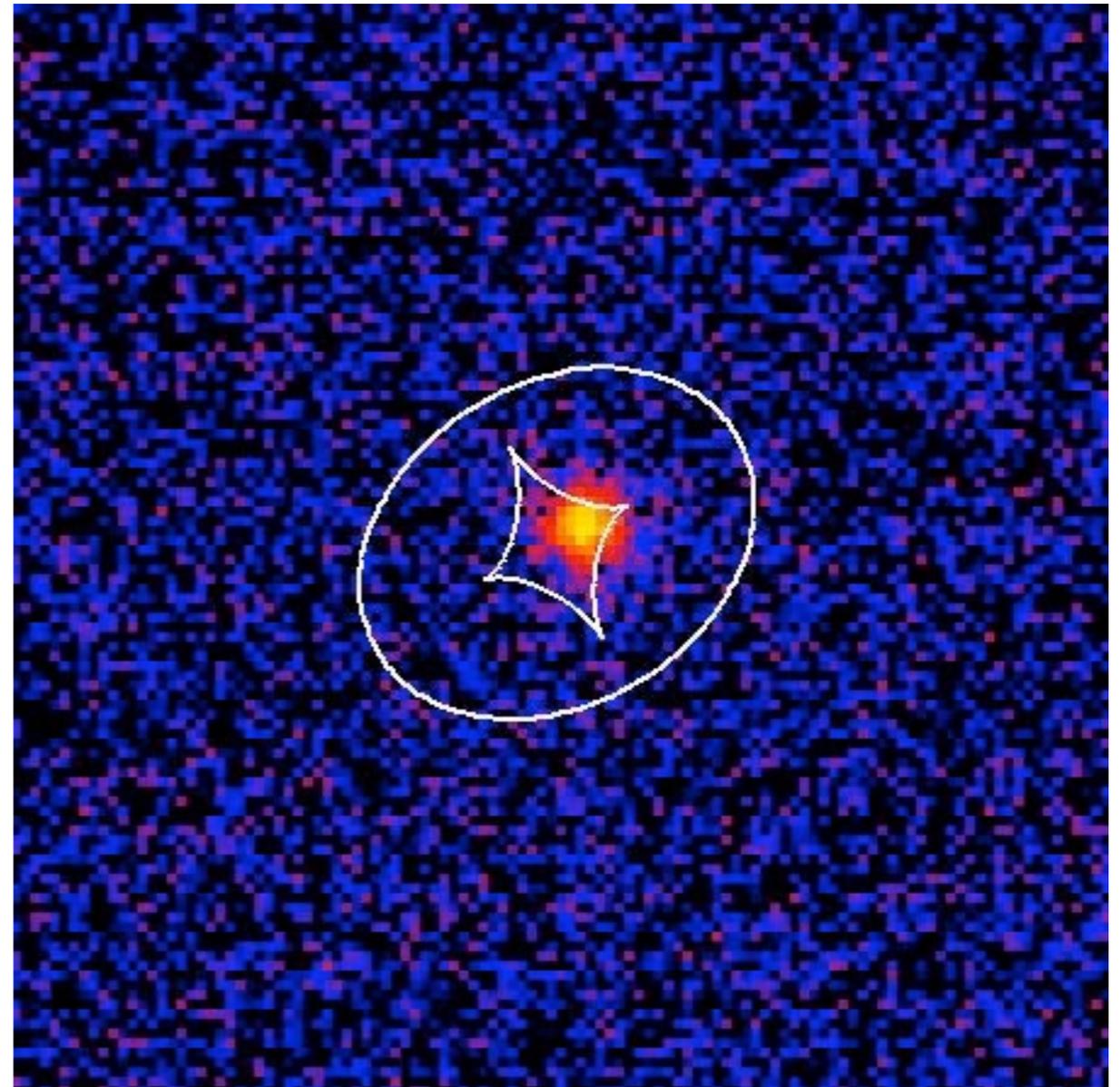


image plane
(critical curves)



source plane
(caustics)

像の分離角とアインシュタイン半径

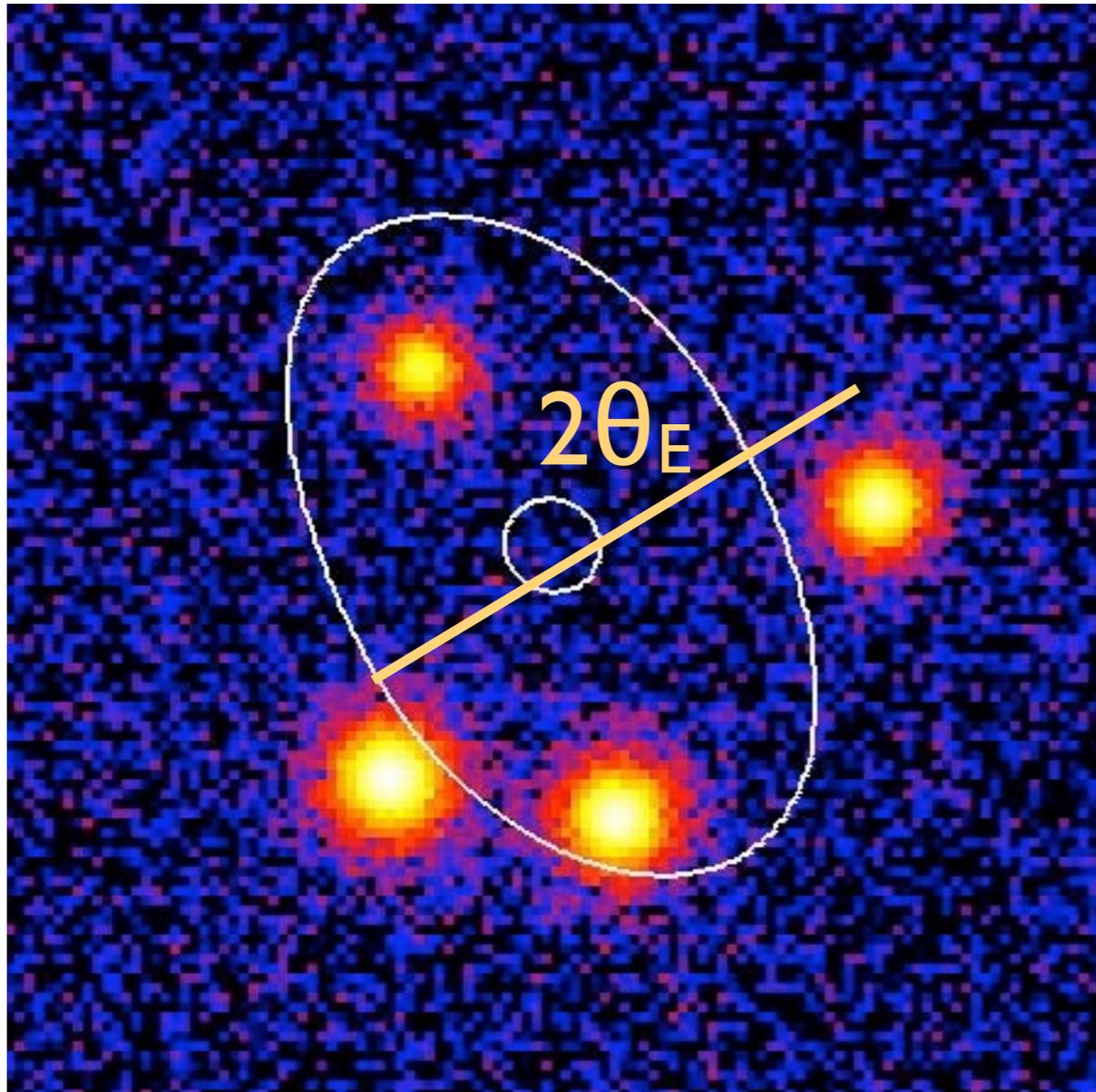
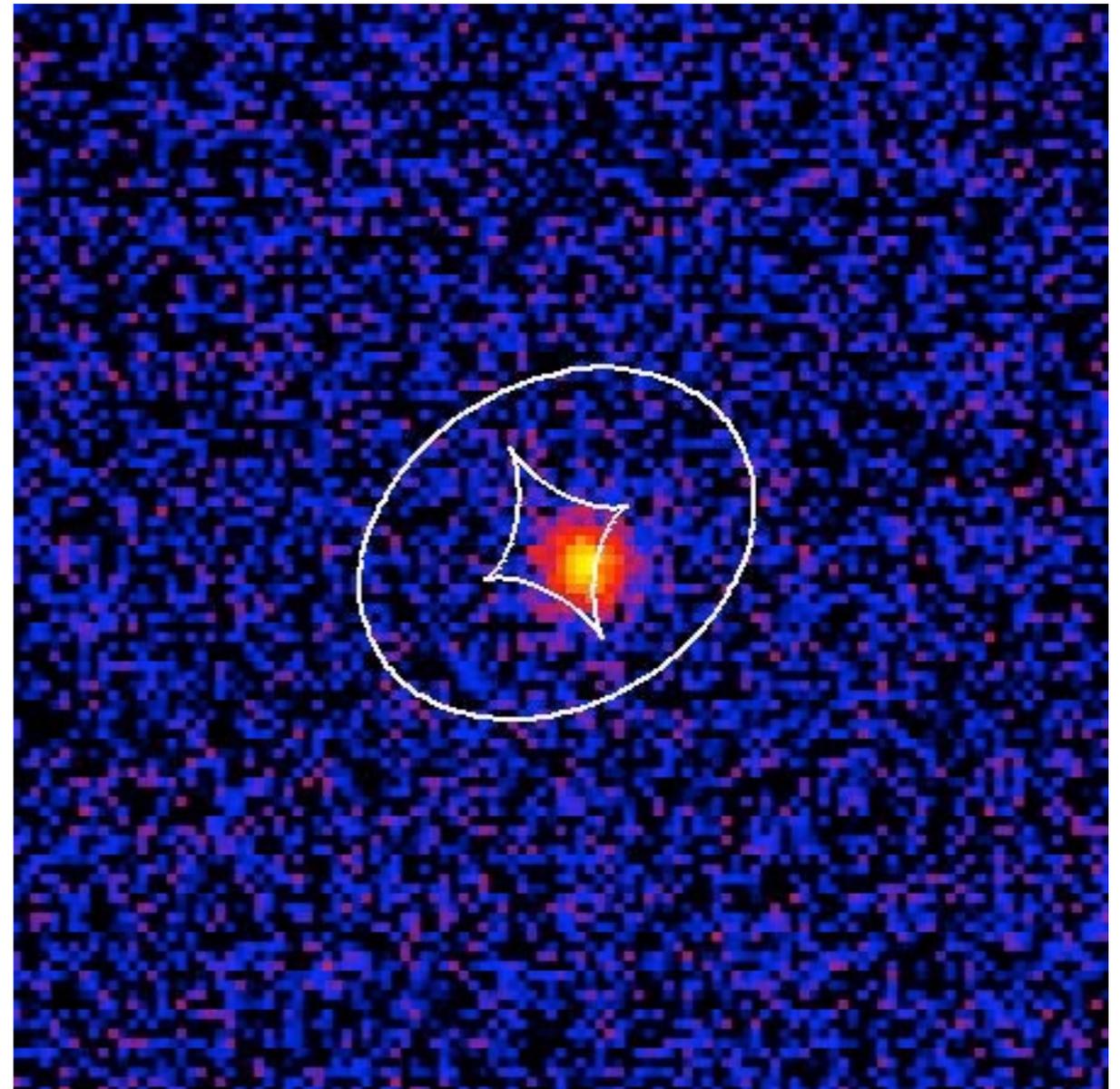


image plane
(critical curves)



source plane
(caustics)

像の分離角とアインシュタイン半径

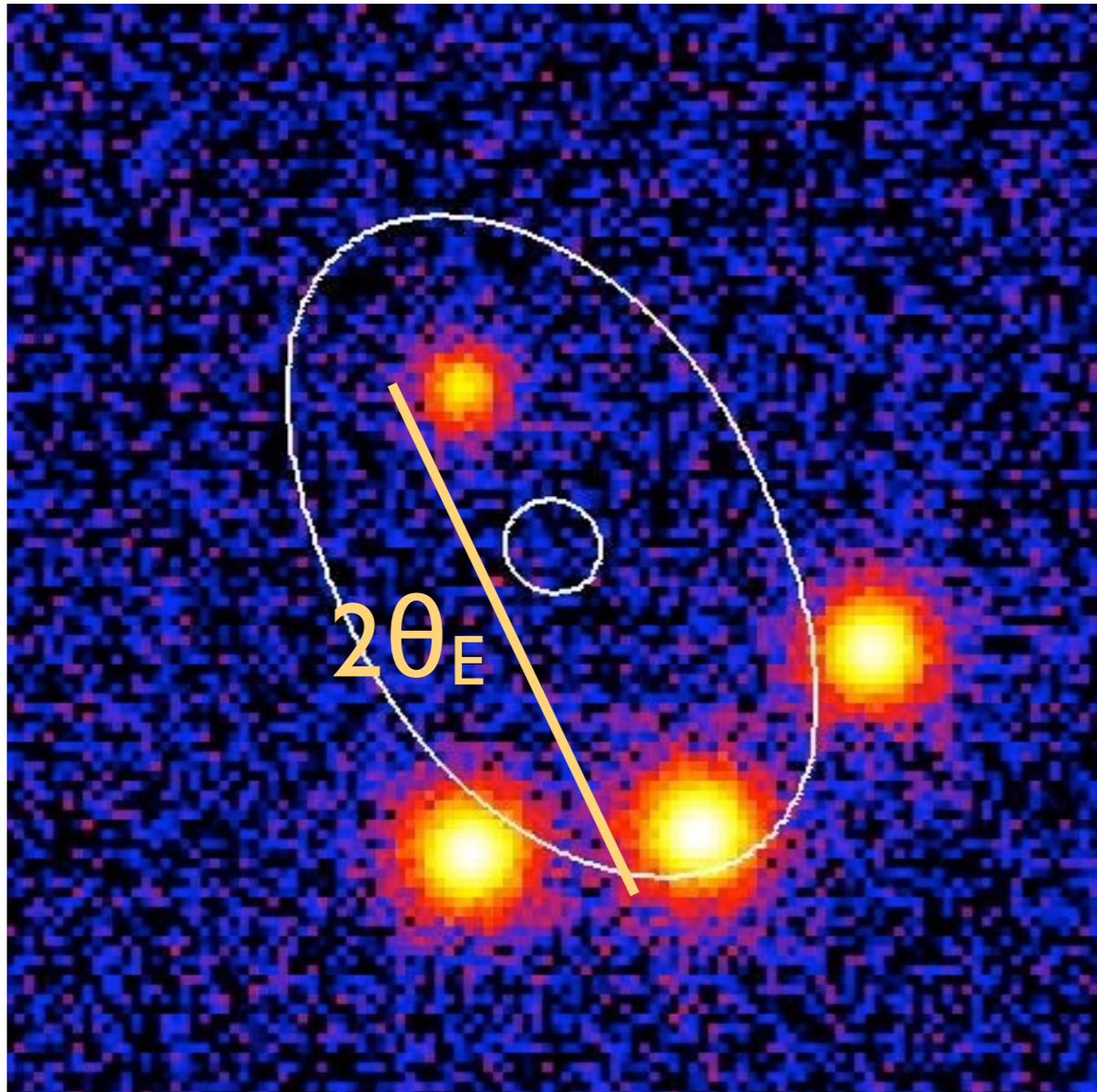
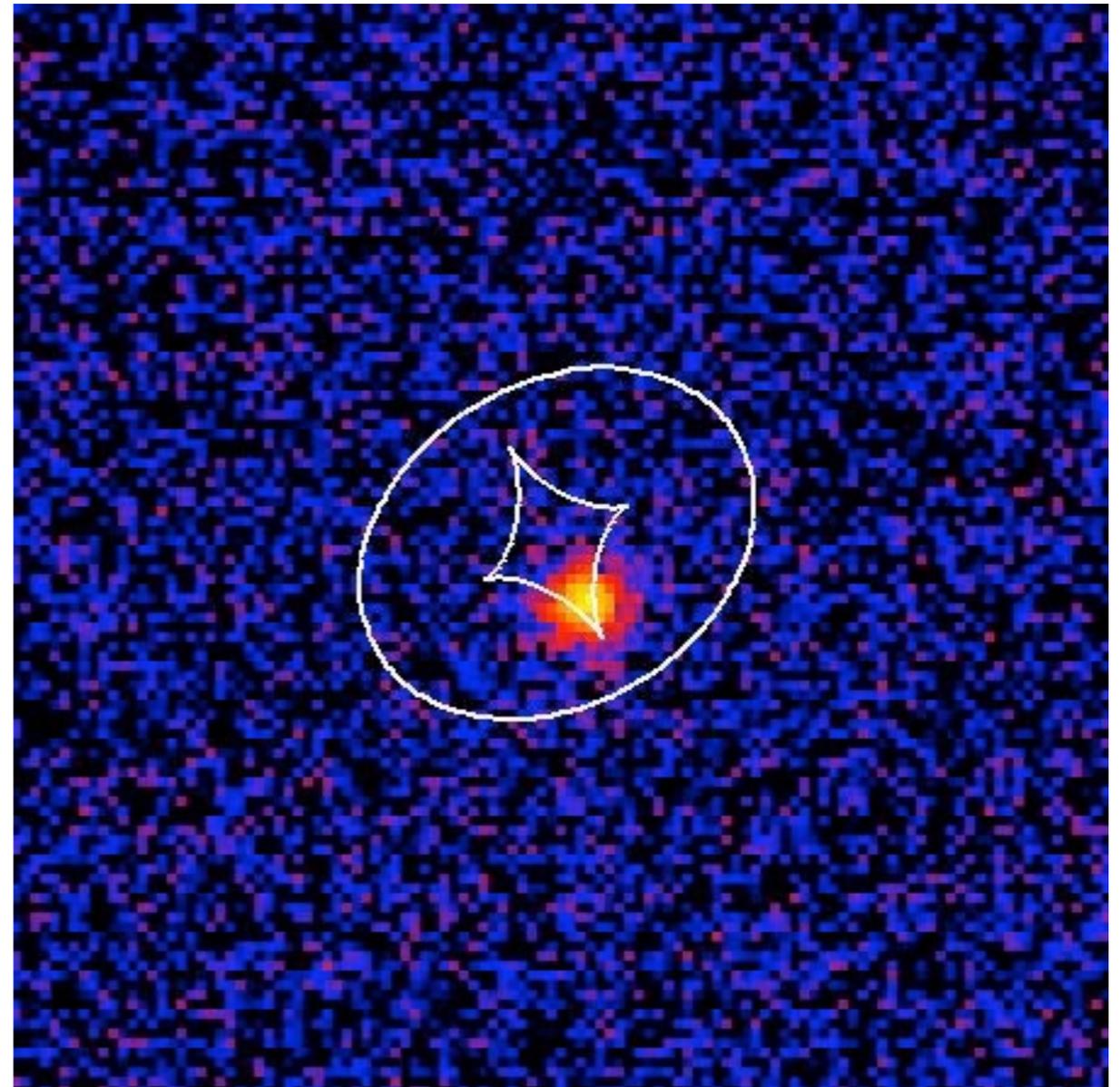


image plane
(critical curves)



source plane
(caustics)

像の分離角とアインシュタイン半径

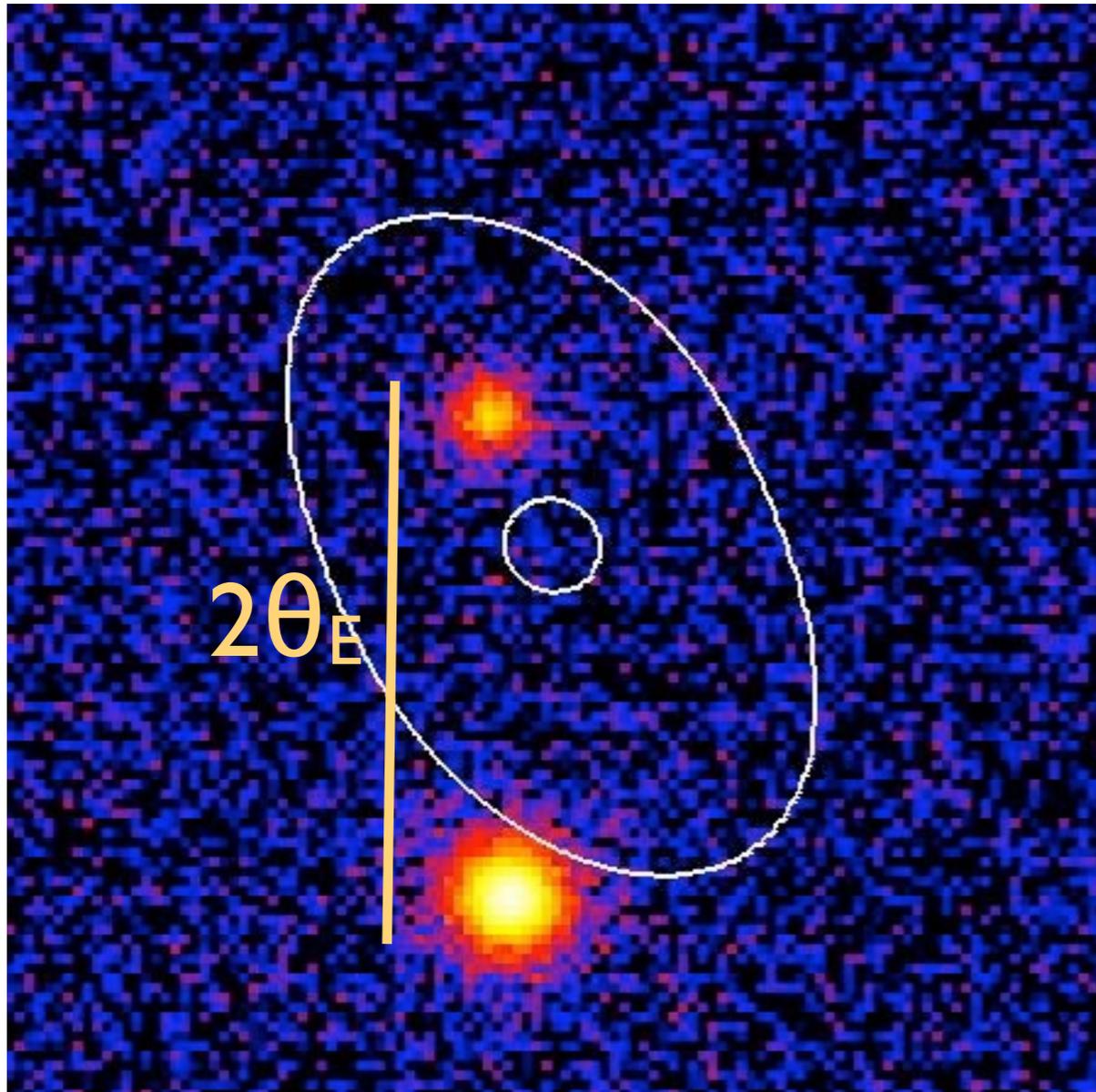
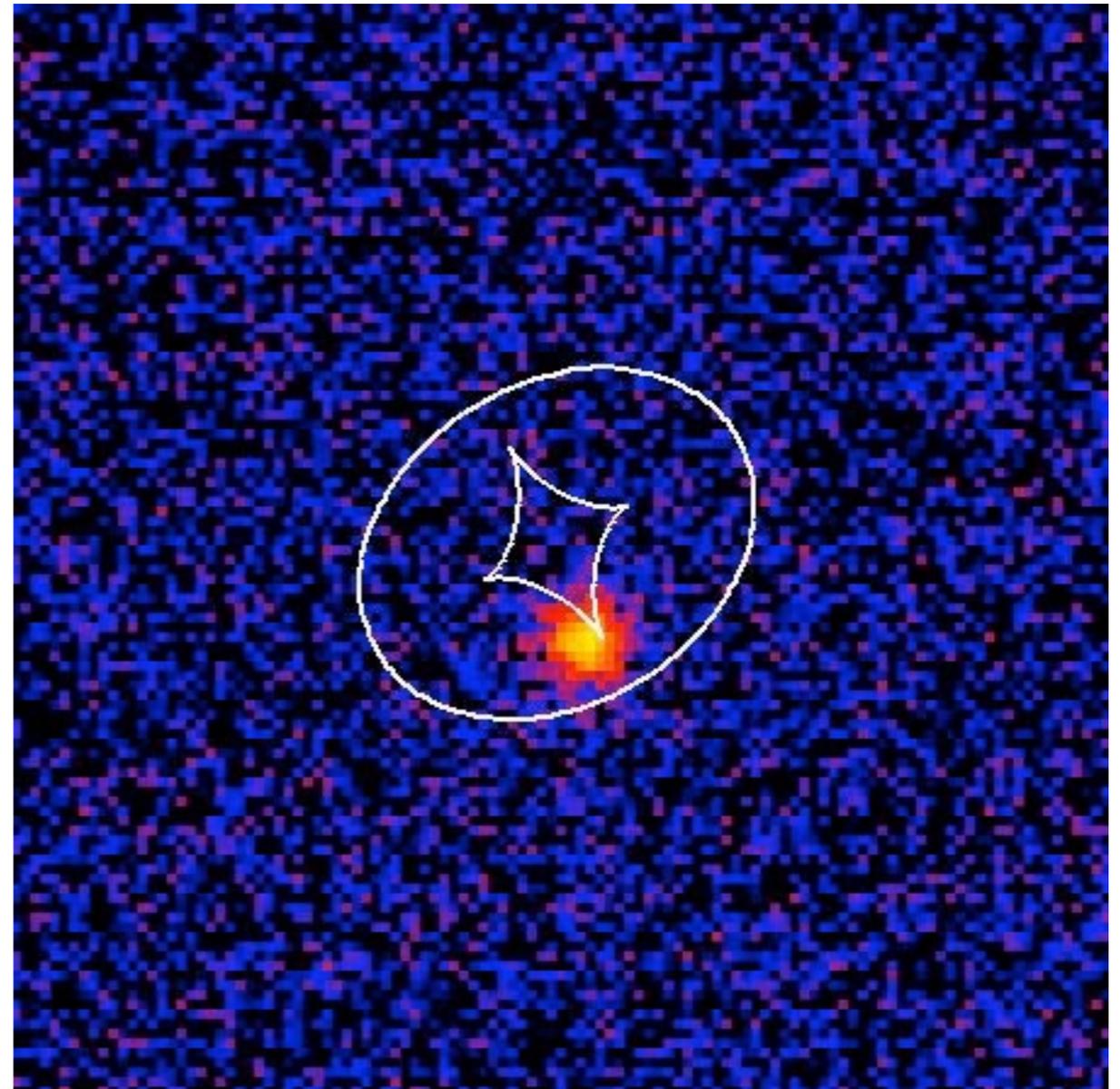


image plane
(critical curves)



source plane
(caustics)

像の分離角とアインシュタイン半径

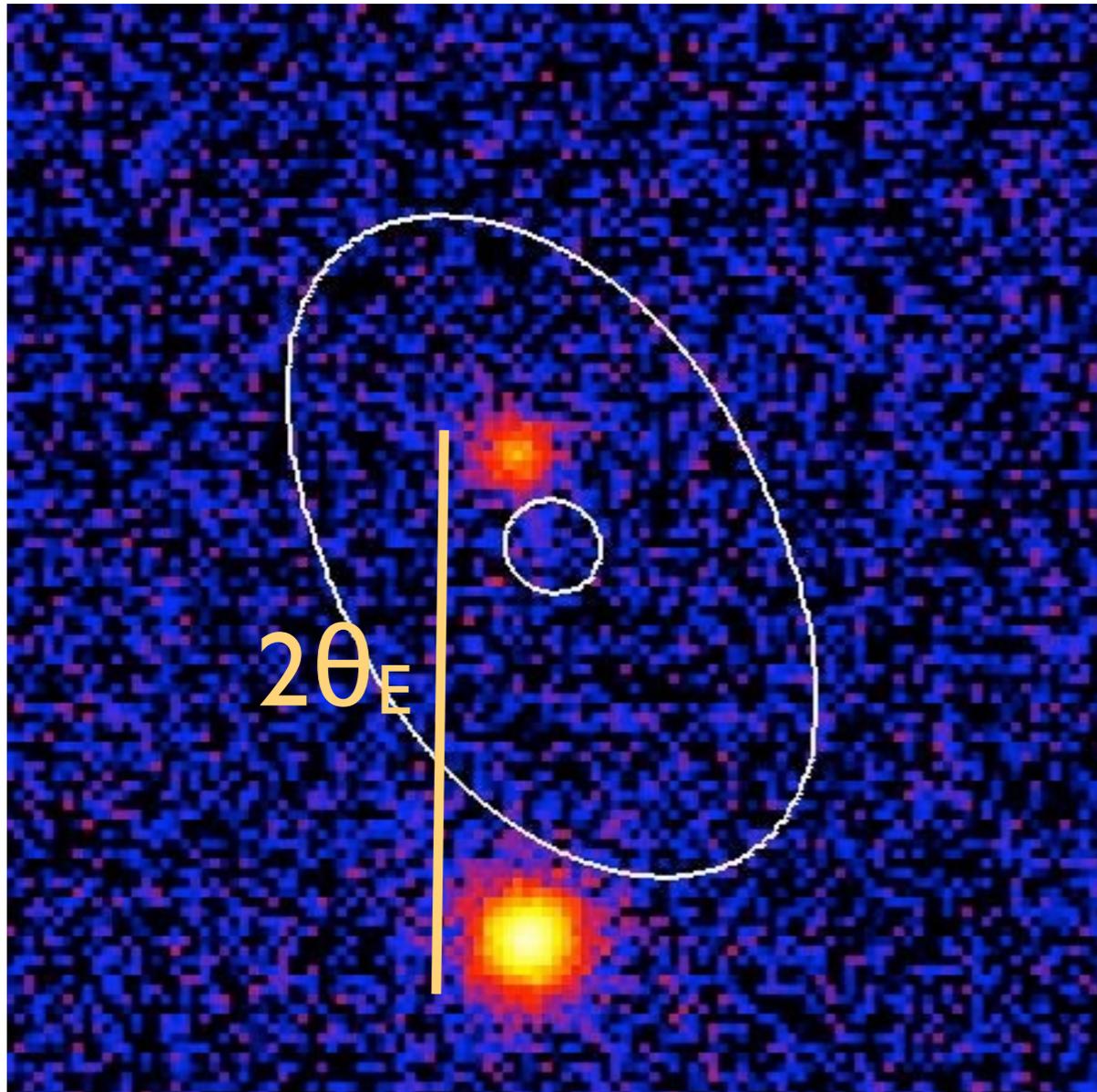
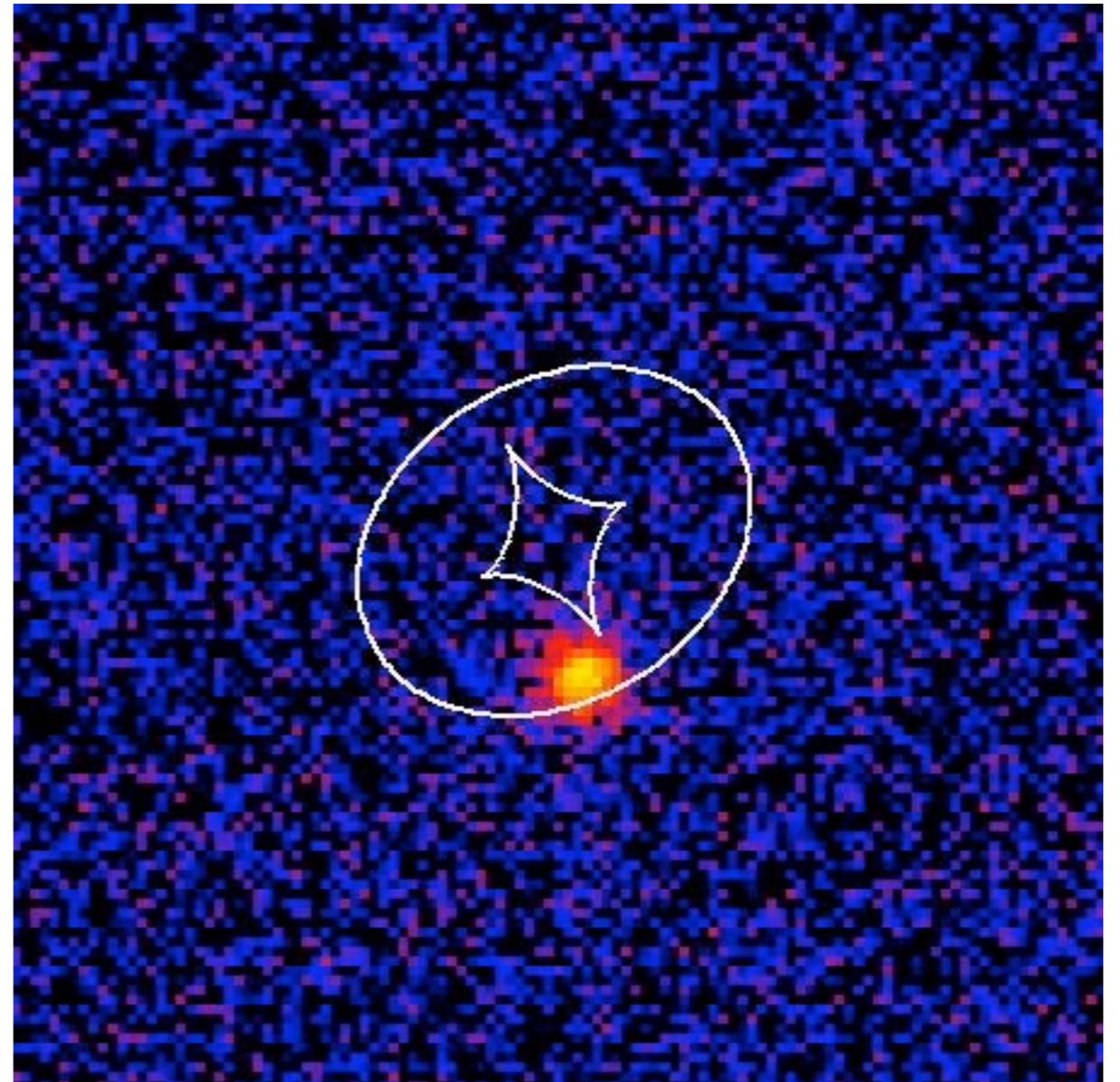


image plane
(critical curves)



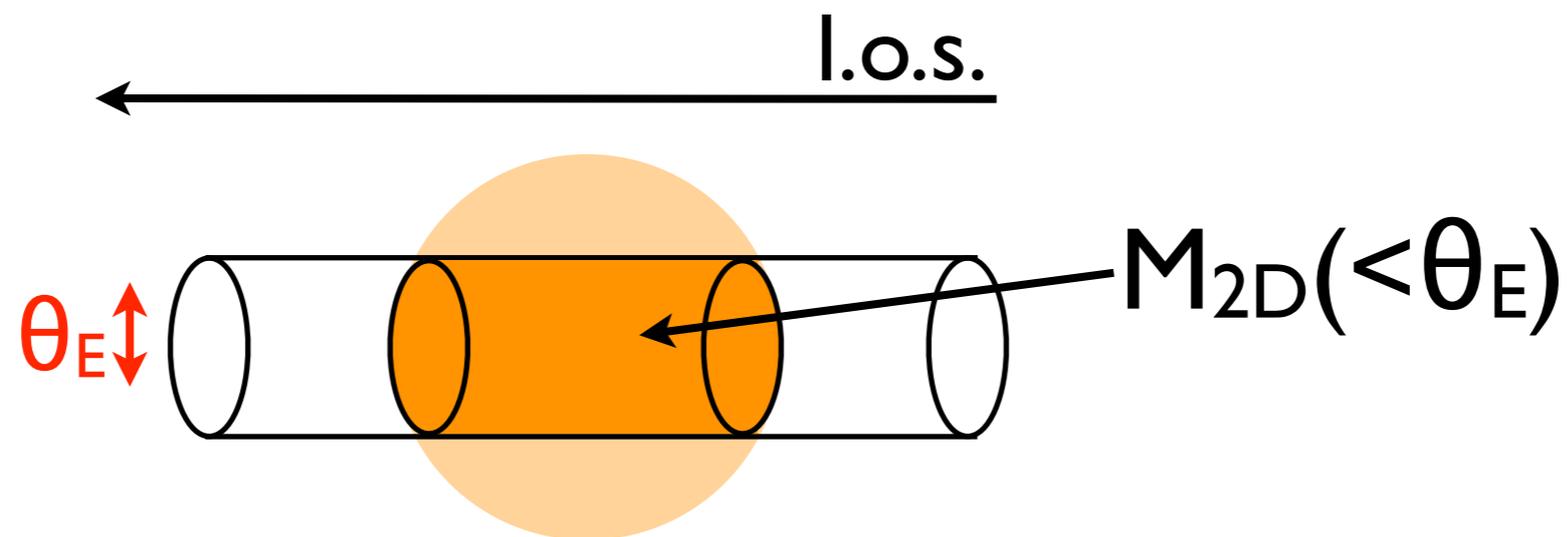
source plane
(caustics)

強い重力レンズで何がわかるか? (II)

- 復習: 軸対称でのアインシュタイン半径 θ_E は

$$1 = \bar{\kappa}(< \theta_E) = \frac{M_{2D}(< \theta_E)}{\pi \theta_E^2 D_A^2(z_l) \Sigma_{cr}}$$

→強い重力レンズ観測により視線方向に射影した半径 θ_E 内の全質量 $M_{2D}(< \theta_E)$ が決まる



アインシュタイン半径

- 点源 (point mass, 質量 M)

$$\theta_{\text{Ein}} = \sqrt{\frac{4GM}{c^2} \frac{D_A(z_l, z_s)}{D_A(z_l)D_A(z_s)}}$$

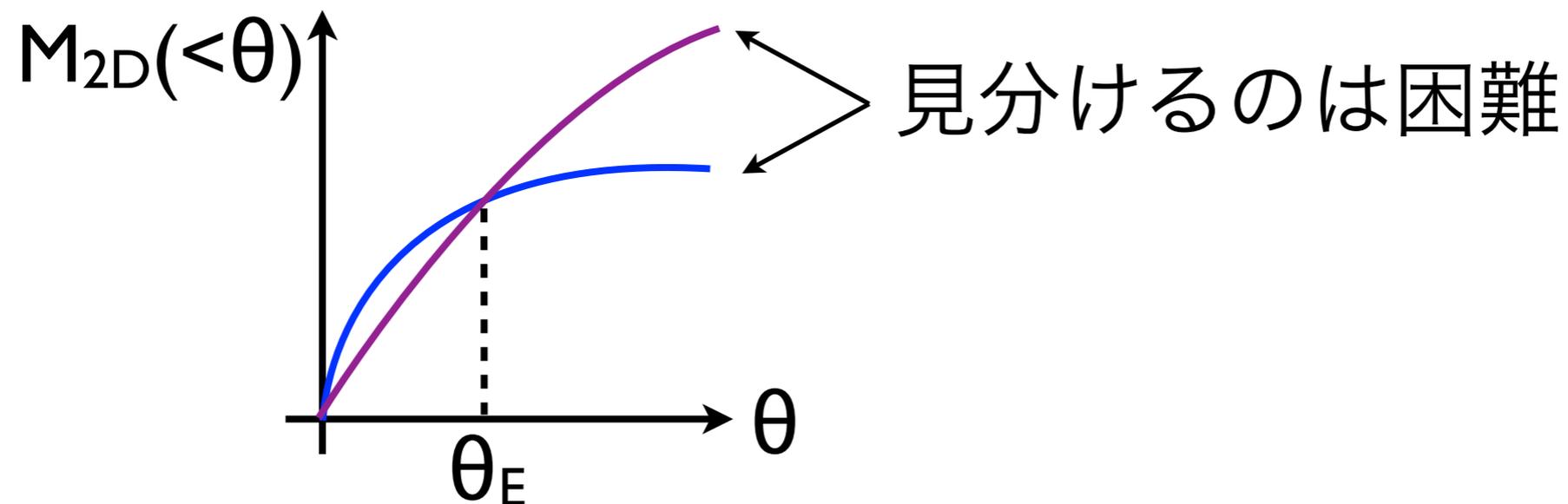
- 等温球 (SIS, 速度分散 σ)

$$\theta_{\text{Ein}} = \frac{4\pi\sigma^2}{c^2} \frac{D_A(z_l, z_s)}{D_A(z_s)}$$

(銀河では数秒角、銀河団では数十秒角)

強い重力レンズで何がわかるか? (III)

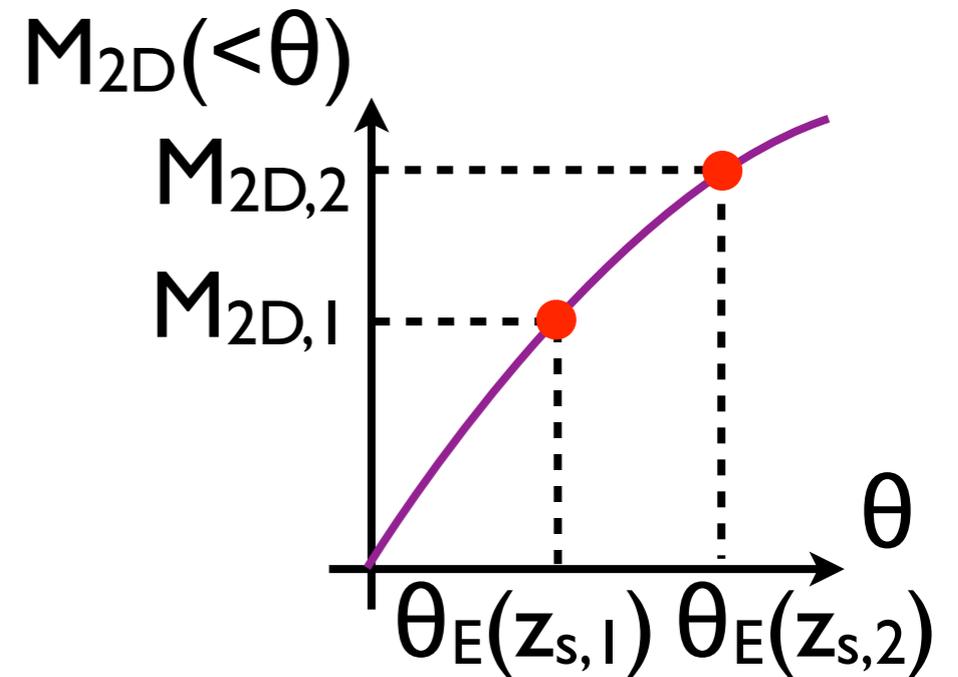
- 一方で動径密度分布はあまり強く制限されない
→ mass-sheet縮退の一種 (e.g., Wucknitz 2002)



- 動径密度分布を制限するには？
 - (1) いくつかの z_s の異なるソースを組み合わせる
 - (2) 時間の遅れ、アークなどの制限を利用
 - (3) 速度分散、弱い重力レンズ等と組み合わせる

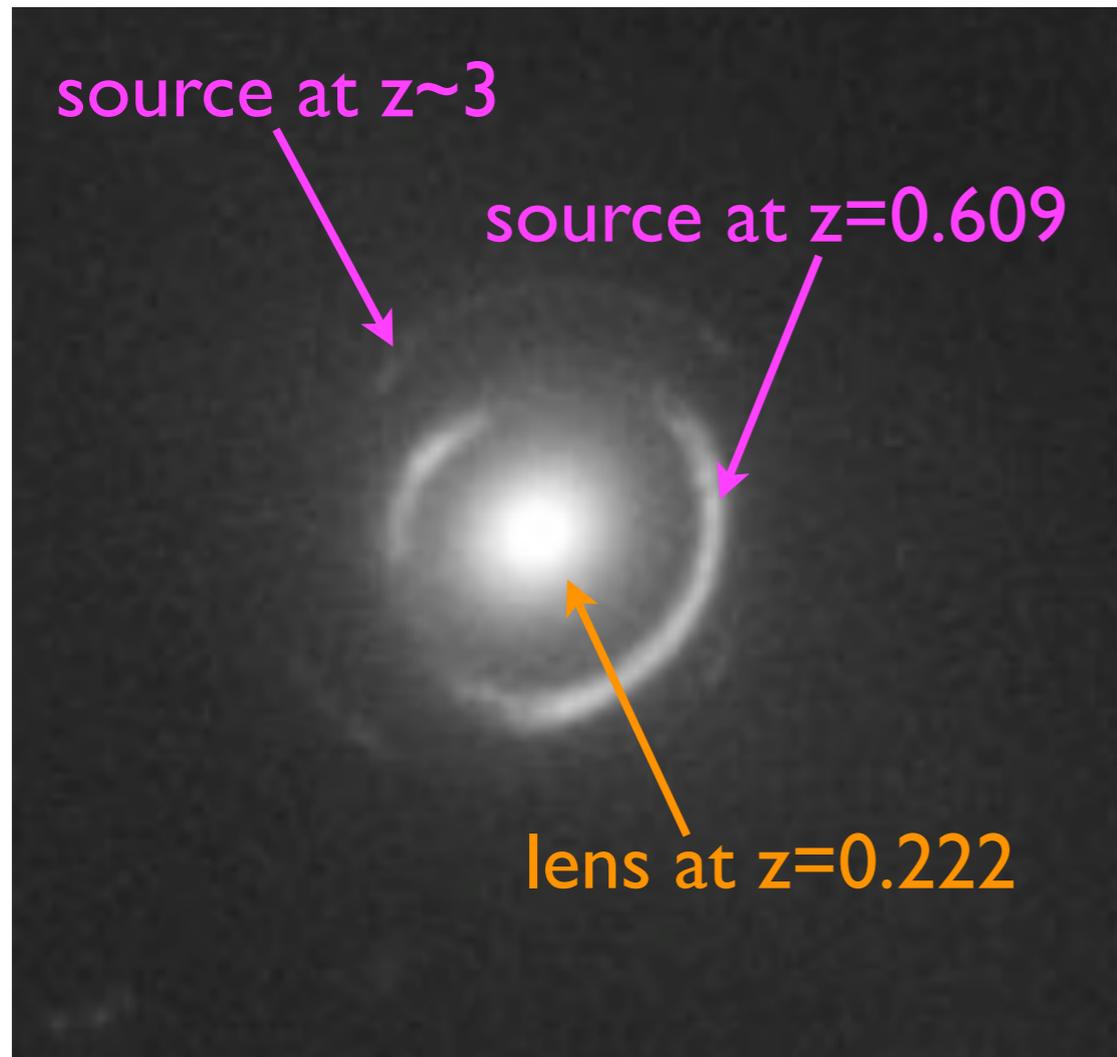
複数のソース赤方偏移 z_s

- 同じレンズ天体に対して異なる z_s の複数の強い重力レンズが観測されれば違う半径の $M_{2D}(<\theta)$ が測定でき動径密度分布を制限できる

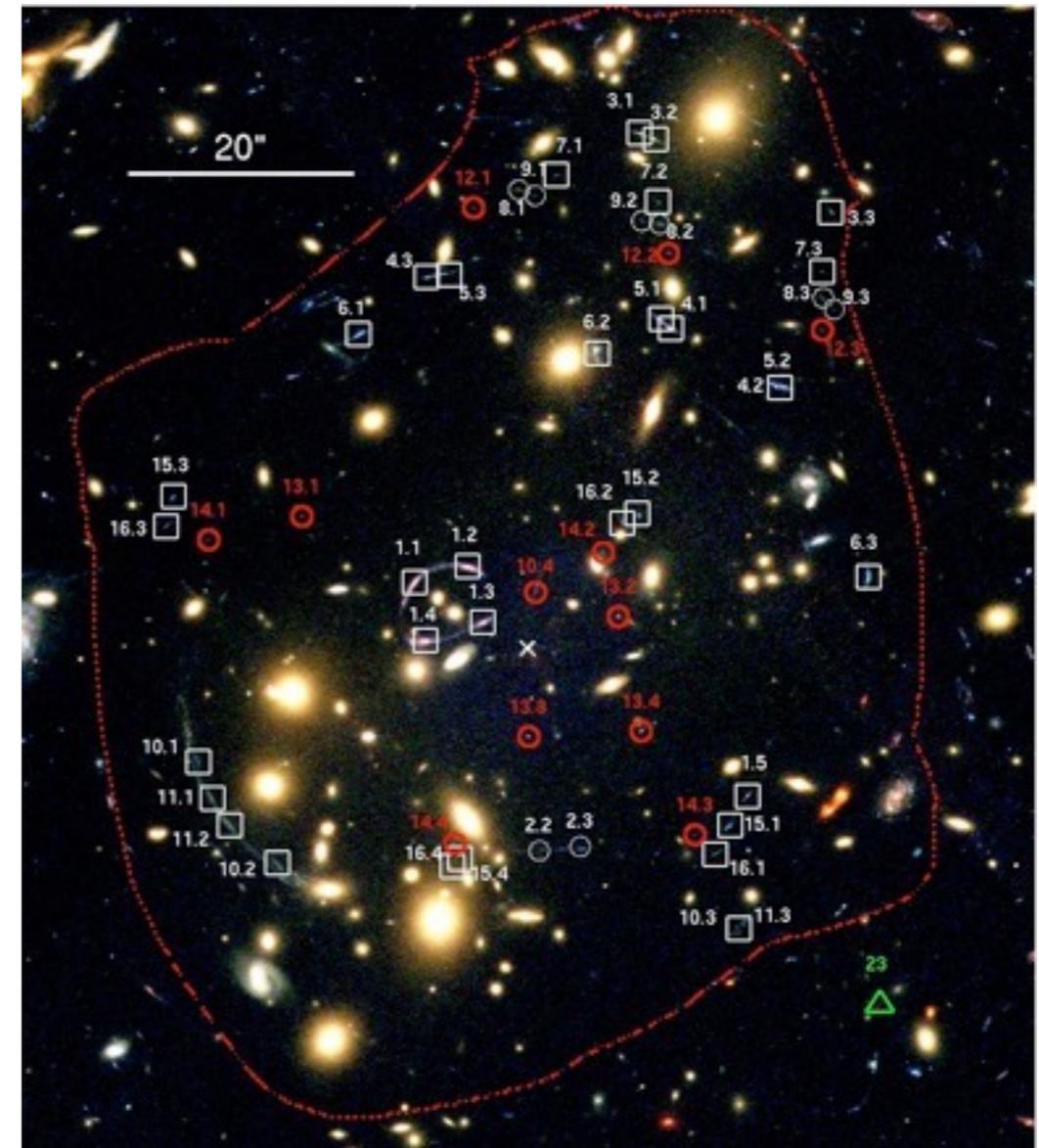


- 動径密度分布を制限し、さらに他の制限と組み合わせるなどして宇宙論パラメータを制限する有力な手法 (e.g., Jullo et al. 2010)

複数のソース赤方偏移の例



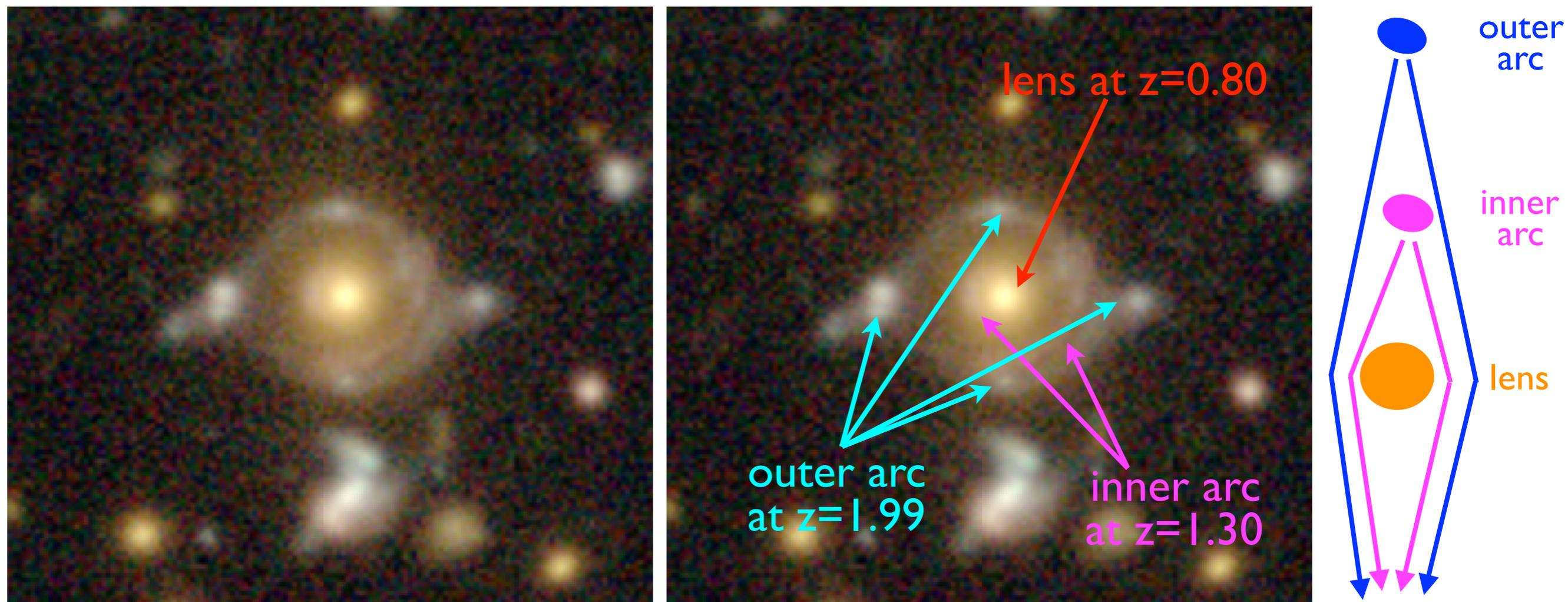
銀河 SDSSJ0946+1006
「二重アインシュタイン
リング」 (Gavazzi et al. 2008)



銀河団 Abell 1703

(Richard et al. 2009;
Oguri et al. 2009)

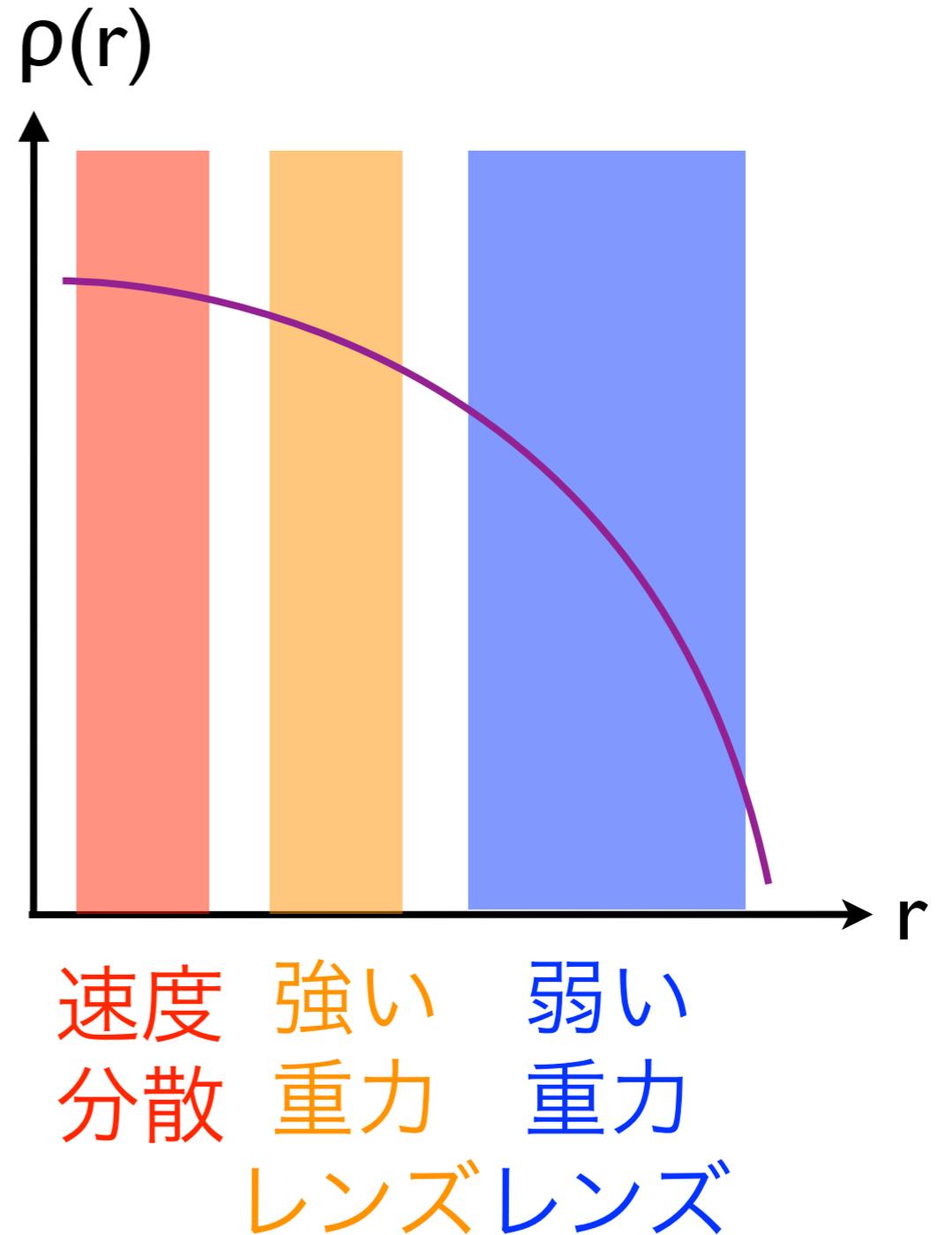
「ホルスの目」



- HSCサーベイで最近発見された新しい「double source plane」重力レンズ

他の制限との組み合わせ

- 銀河の速度分散
→ 中心部の全質量
- 弱い重力レンズ
→ 外縁部の質量分布



まとめ

- 一般にレンズ方程式を解くのは容易ではない
(数値的解法に頼ることもしばしば必要)
- 軸対称レンズでは解の振る舞いは比較的容易
非軸対称ではとたんに複雑に
- 強い重力レンズにより、アインシュタイン
半径内部の全質量を主に制限できる