

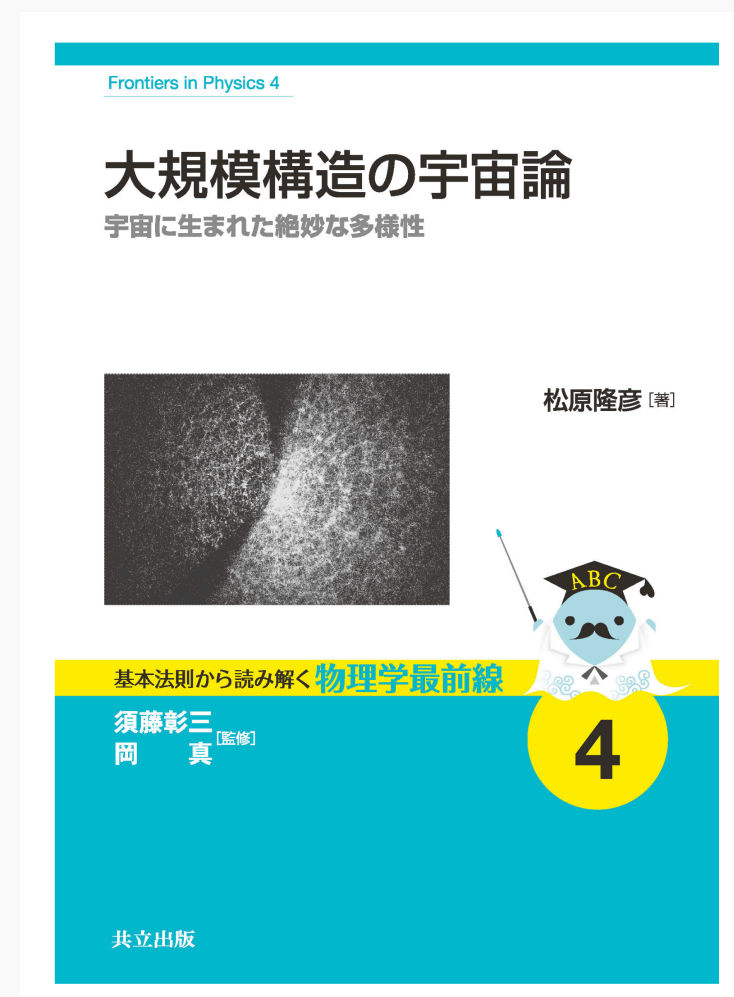
小スケールパワースペクトル

大栗 真宗

千葉大学 先進科学センター

宇宙の大規模構造

- 宇宙の大規模構造はパワースペクトルで特徴づけられる



これらの**名著**で
勉強しましたよね...

CDMの小スケール問題（？）

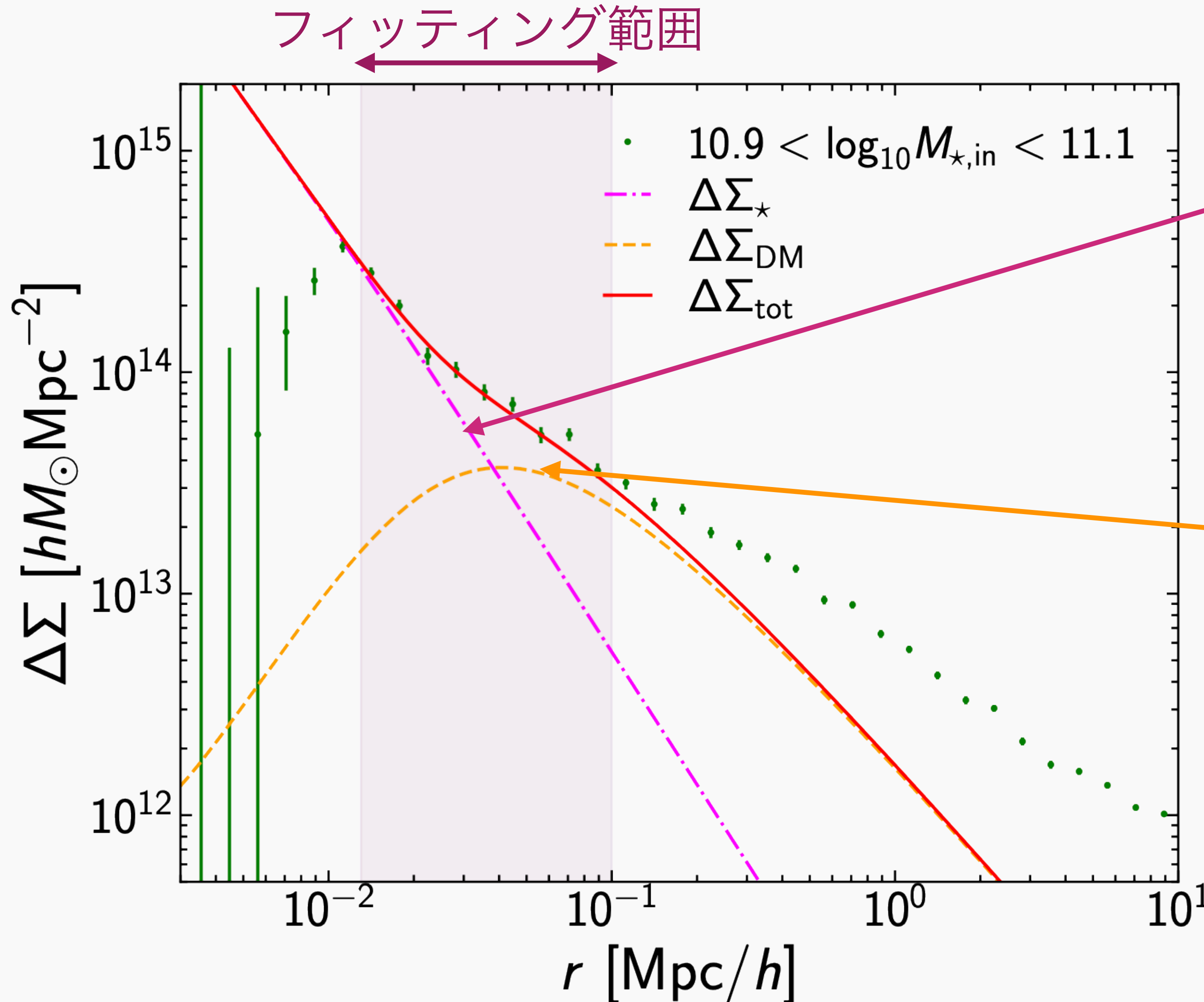
- 昔から言われていたいくつかの小スケール問題 (e.g., missing satellite問題) は現在では問題ではないと考えられている
- 一方で新たな問題も浮上してきている





弱い重力レンズによるDM分布測定

差分質量面密度 (接線歪み場)



星質量: Hernquist分布

$$\rho_{\star}(r) = \frac{M_{\star} a}{2\pi r (r + a)^3}$$

ダークマター: コア冪分布

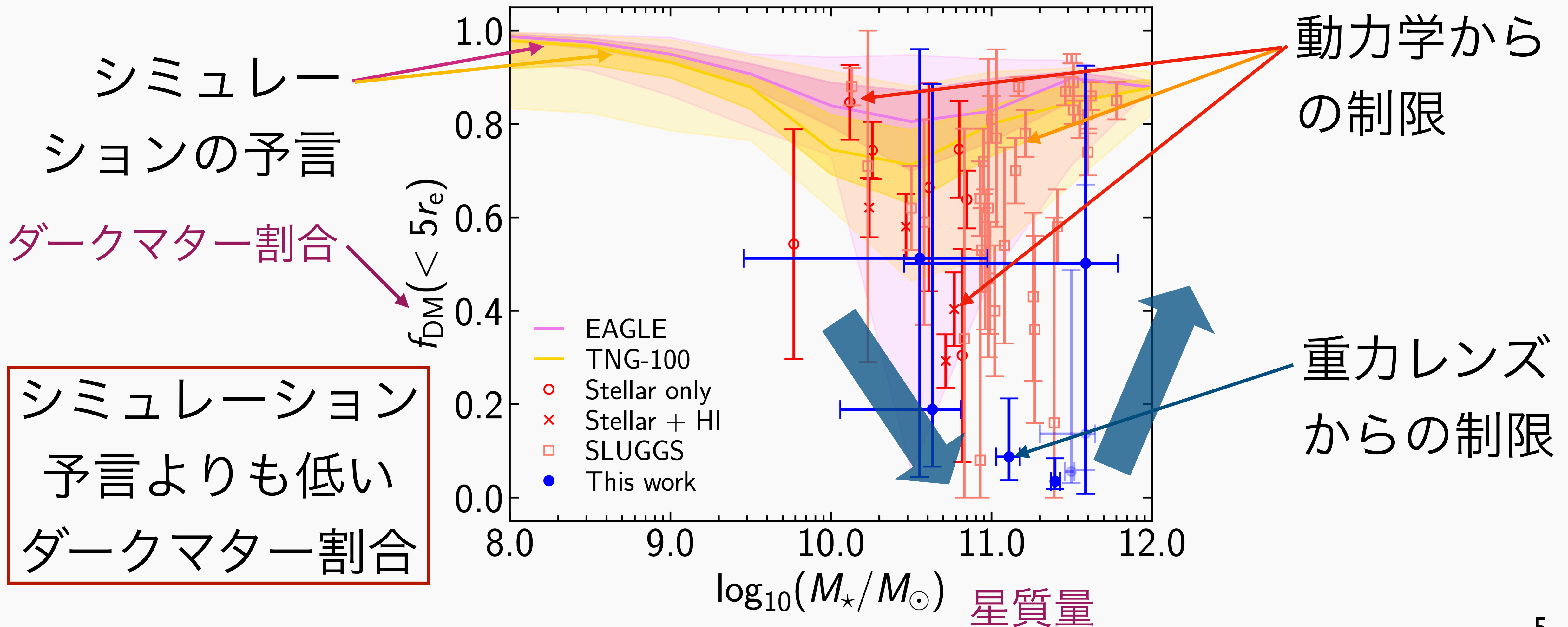
$$\rho_{\text{DM}}(r) \propto (r^2 + r_c^2)^{\gamma/2}$$

星質量とDM質量の直接測定

→ IMF, SHMRの直接的制限

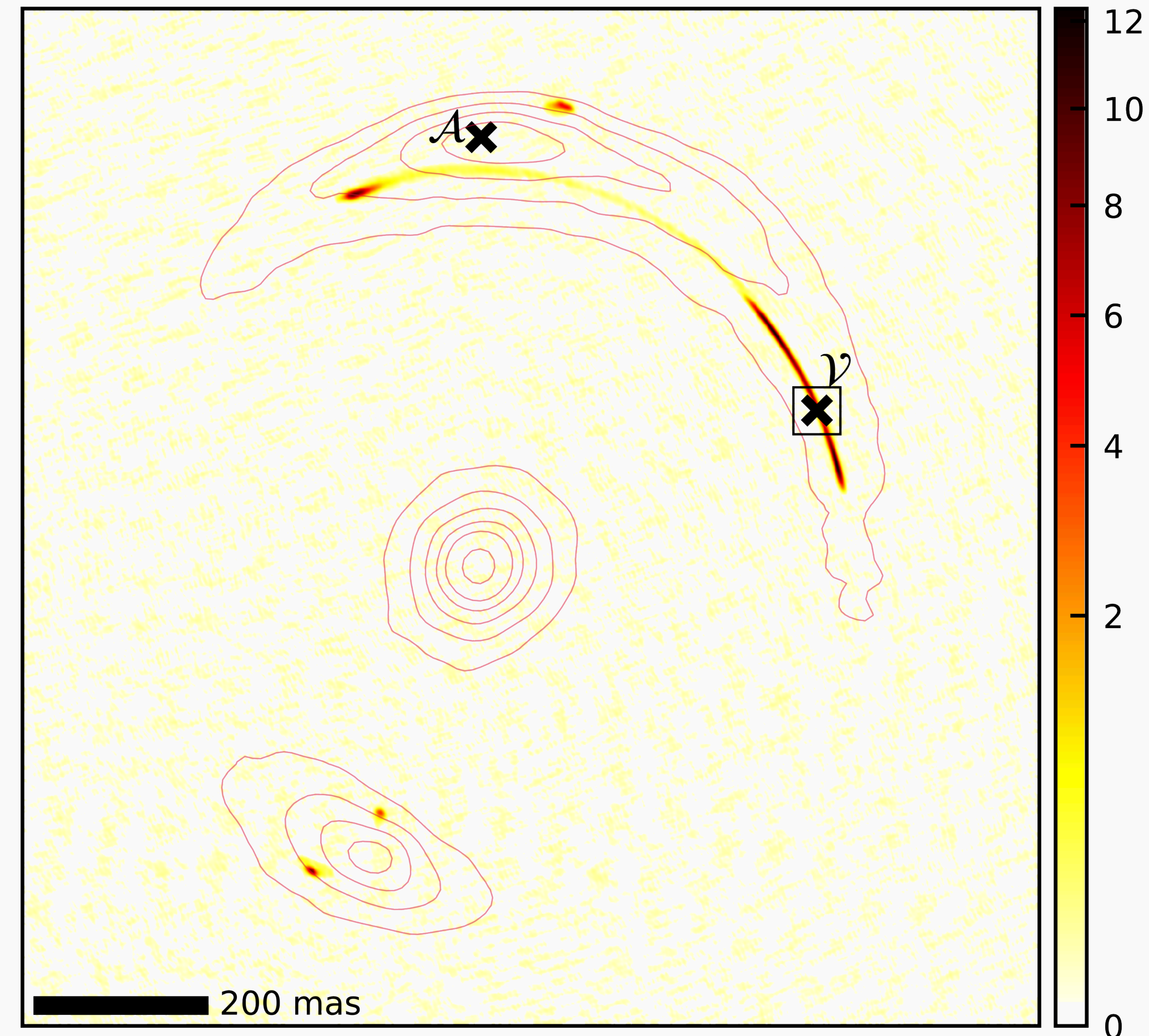


DM割合の測定

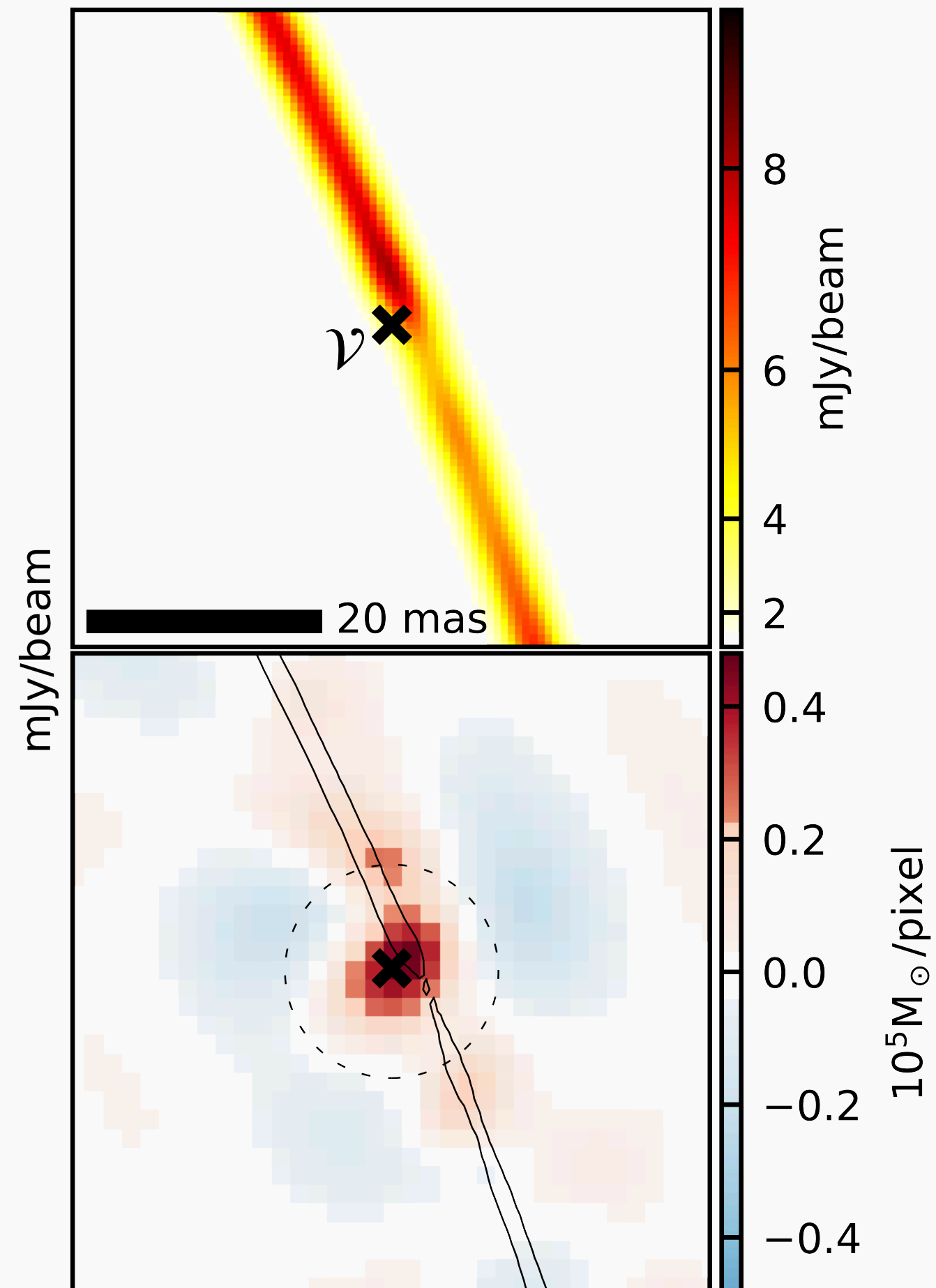


異常に中心集中した小質量天体

- 重力レンズアーク
摂動で $\sim 10^6 M_\odot$
の天体を発見
- 密度分布がCDM
サブハローより
ずっとコンパクト
- 既存の天体で説明
不可



Powell+ Nat. Ast. **9**(2025)1714

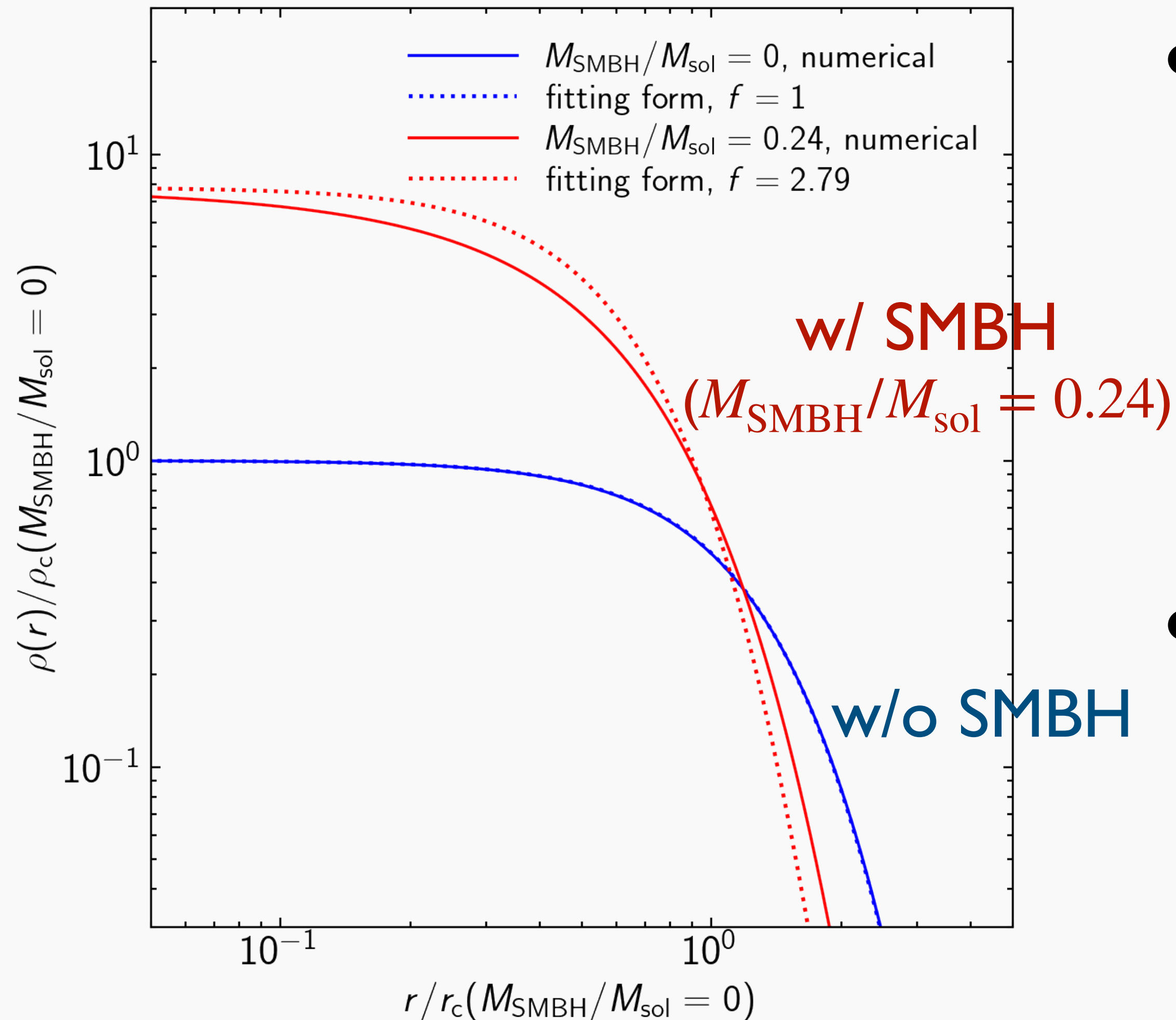


Vegetti+ Nat. Ast. **10**(2026)440



ファジーDMソリトンコア+SMBHシナリオ

ソリトンコアの密度分布



- 観測された摂動天体の密度分布が軽量ダークマターソリトンコア+超巨大ブラックホール (SMBH) で説明できることを示した
- SMBHの重力によりソリトンコアはよりコンパクトになり効率的な重力レンズ摂動天体になる

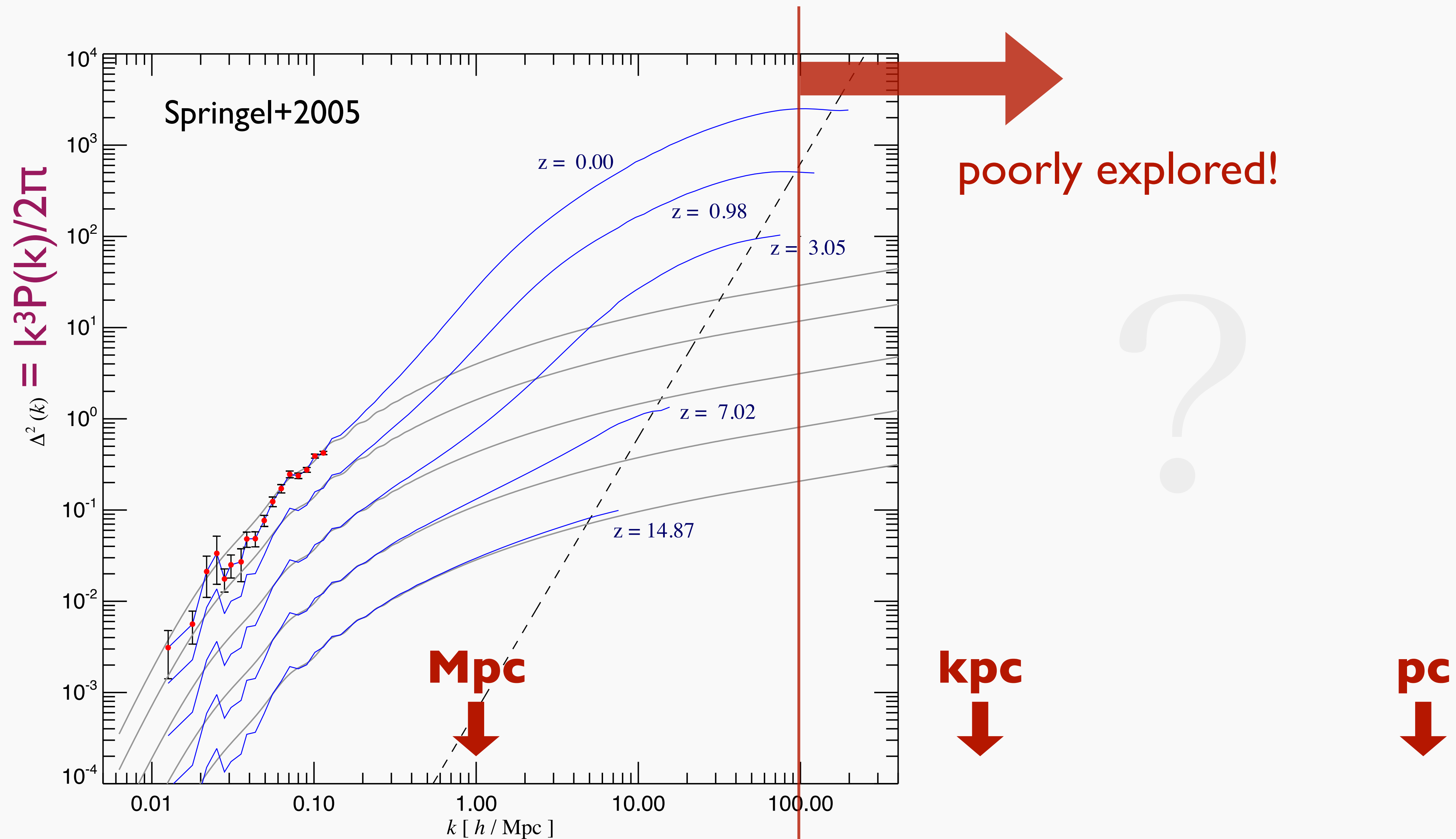
小スケールパワースペクトル？

- 小スケール密度分布はダークマターのプローブとして重要かつ観測的にもますます面白い
- ダークマター小スケール分布の研究にもパワースペクトルが使える

内容

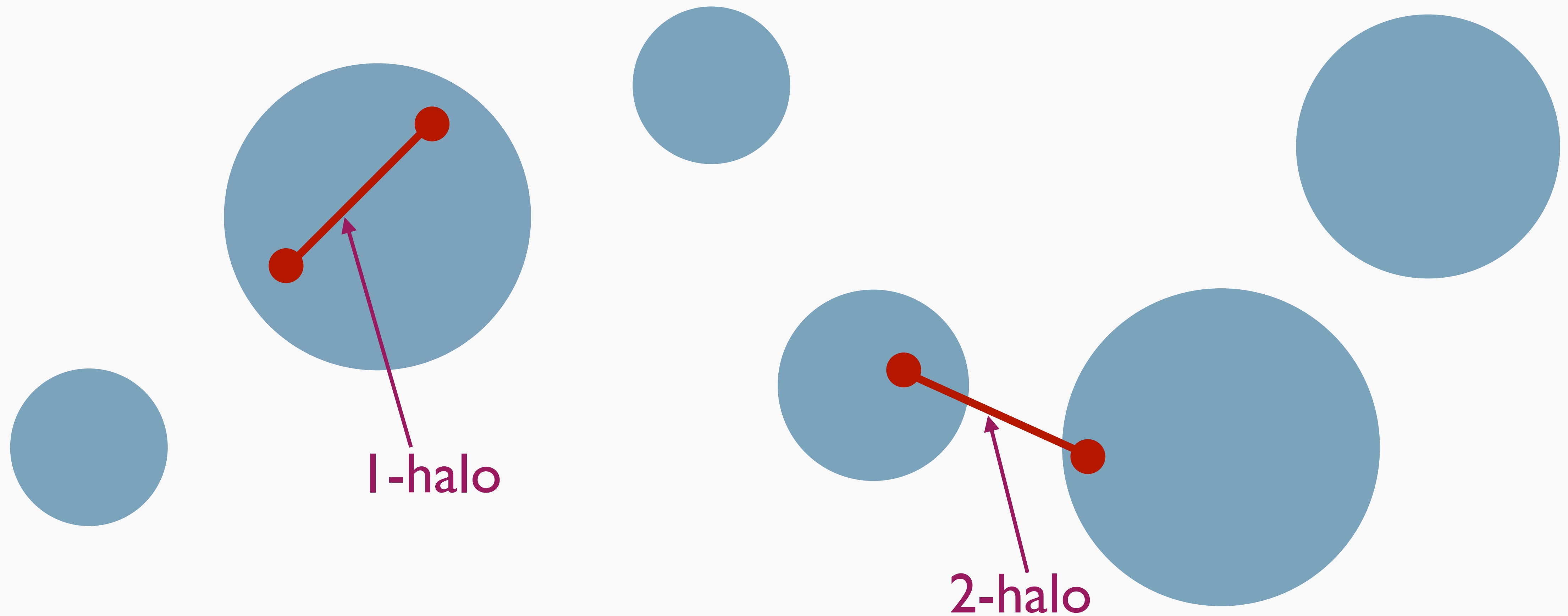
- 小スケールパワースペクトルの理論予言
- 小スケールパワースペクトルの観測方法

質量密度パワースペクトル $P(k)$



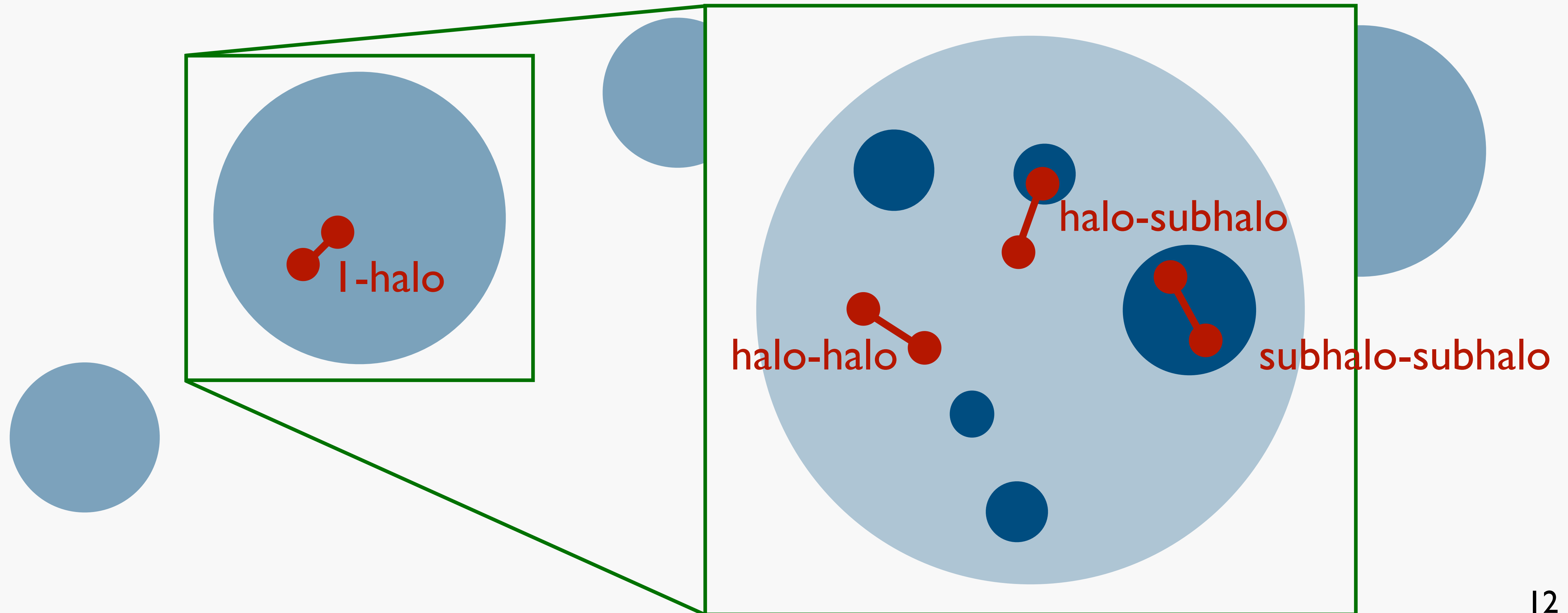
ハローモデル

- $\delta(x_1)\delta(x_2)$ を 1-halo と 2-halo に分解



ハローモデルとsubstructure

- halo内のsubhaloの寄与もハローモデルで考えることができる



substructure込みのハローモデル

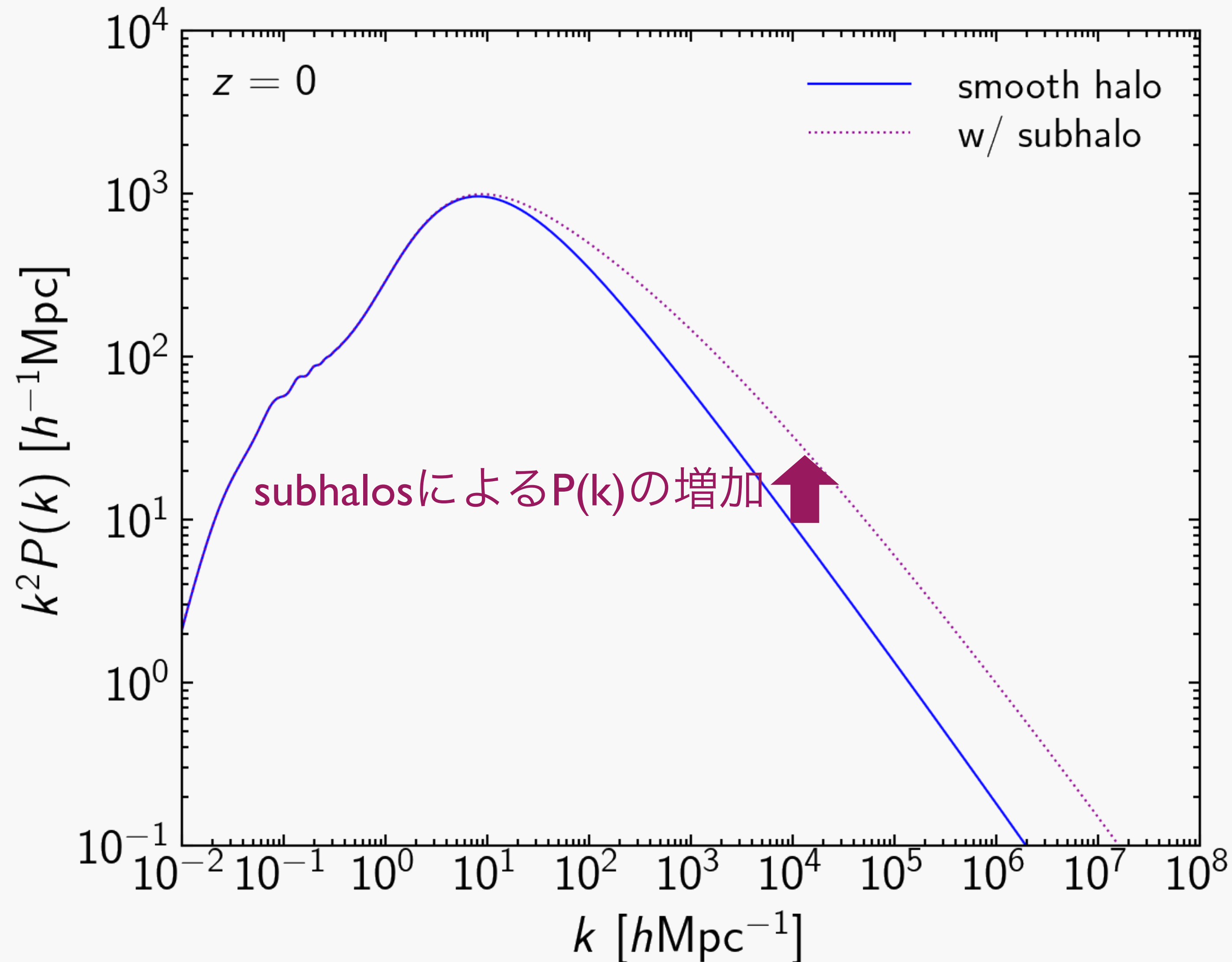
- 規格化されたハロー密度分布 $u(\mathbf{x} | M) = \rho(\mathbf{x} | M)/M$

$$u(\mathbf{x} | M) = \underbrace{(1 - f_s)u_h(\mathbf{x} | M)}_{\text{halo}} + \sum_i \underbrace{\int dm \int d\mathbf{x}' \delta^D(m - m_i) \delta^D(\mathbf{x}' - \mathbf{x}_i) \frac{m}{M} u_s(\mathbf{x} - \mathbf{x}' | M, m, \mathbf{x}')}_{\text{subhalo}}$$

$$\begin{aligned} \text{I-halo} \rightarrow \langle |\tilde{u}(\mathbf{k} | M)|^2 \rangle &= |\langle \tilde{u}(\mathbf{k} | M) \rangle|^2 + \underbrace{\int dm \int d\mathbf{x} \frac{d^2 N_s}{dm d\mathbf{x}} \left(\frac{m}{M} \right)^2}_{\text{subhaloのメインの寄与}} |\tilde{u}_s(\mathbf{k} | M, m, \mathbf{x})|^2 \\ &+ \int dm \int dm' \int d\mathbf{x} \int d\mathbf{x}' \frac{d^2 N_s}{dm d\mathbf{x}} \frac{d^2 N_s}{dm' d\mathbf{x}'} \\ &\times \int \frac{d\mathbf{k}'}{(2\pi)^3} P_{ss}(\mathbf{k}' | M, m, m') \frac{mm'}{M^2} \tilde{u}_s(\mathbf{k} | M, m, \mathbf{x}) \tilde{u}_s^*(\mathbf{k} | M, m', \mathbf{x}') e^{-i(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}')} \end{aligned}$$



substructureの影響を考慮した $P(k)$



バリオンの影響

- ガス冷却, 星形成 → より中心集中

$$u_{\text{NFW}}(k) \rightarrow (1 - f_*)u_{\text{NFW}}(k) + f_*u_*(k)$$

- 星 (など) の離散的な天体 → shot noise

$$\langle |u(k)|^2 \rangle \rightarrow \langle |u(k)|^2 \rangle + 1/n_*$$

- ガス圧, フィードバック → 分布の広がり

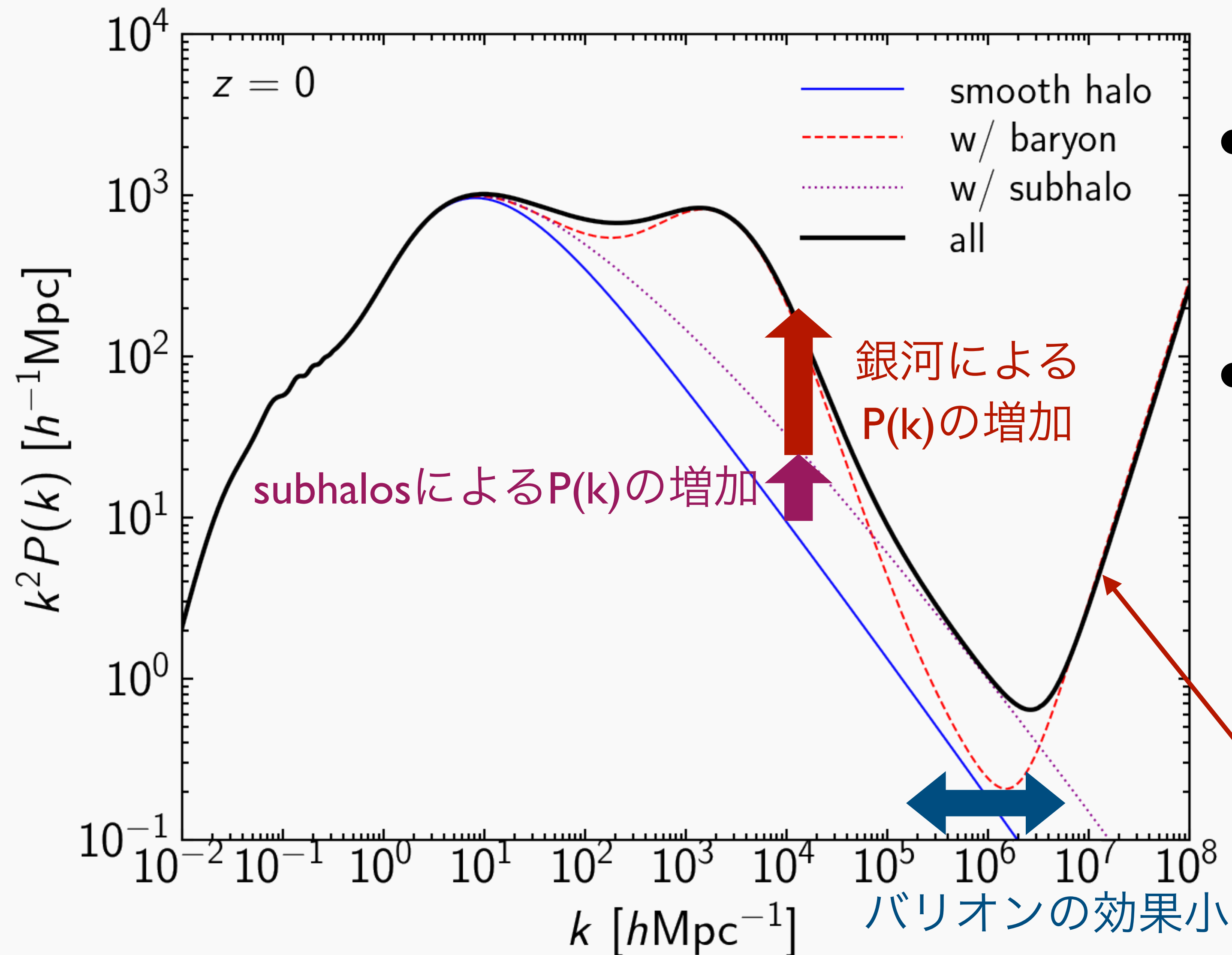
$$u_{\text{NFW}}(k) \rightarrow (1 - f_{\text{gas}})u_{\text{NFW}}(k) + f_{\text{gas}}u_{\text{gas}}(k)$$

小スケールで重要





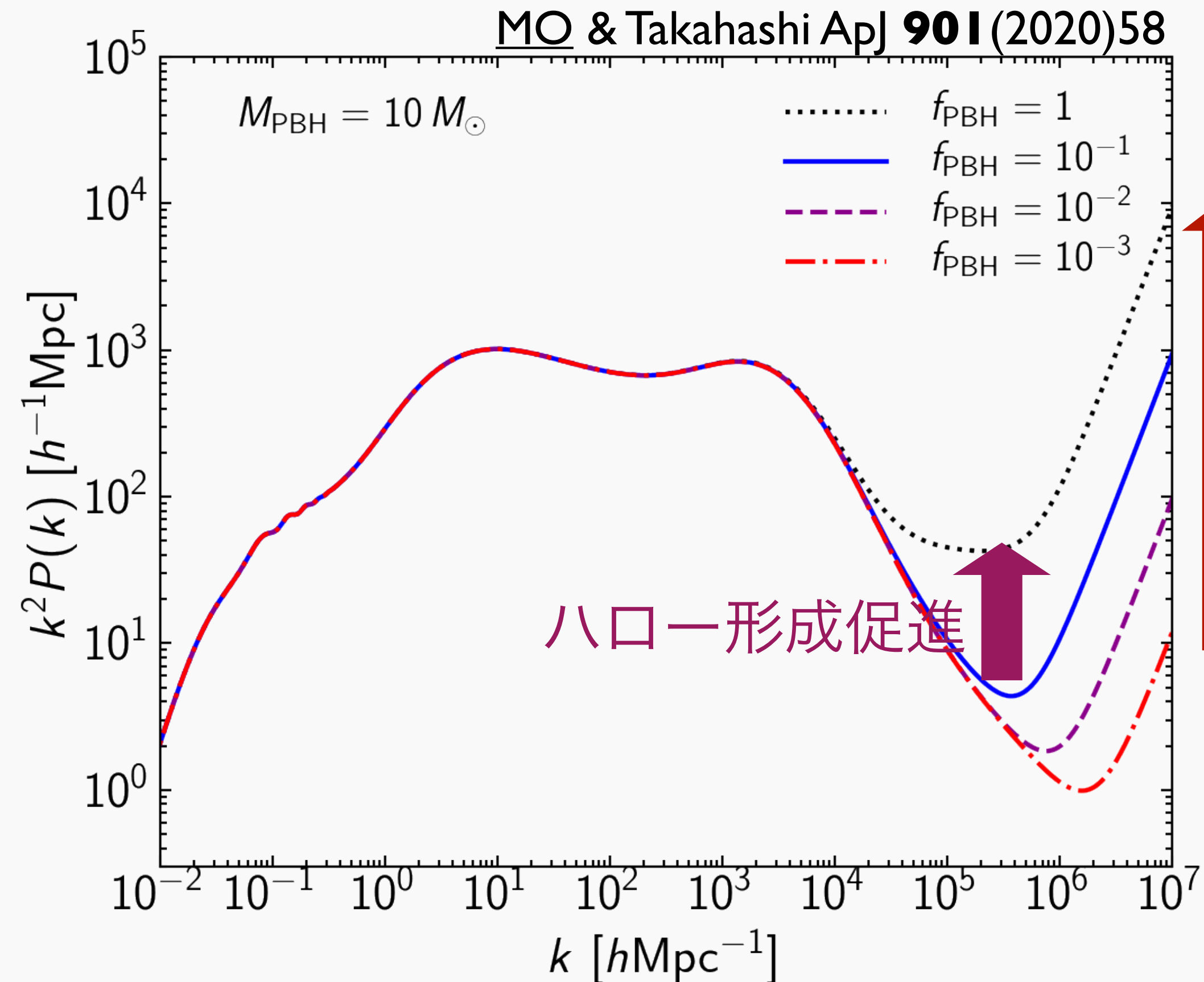
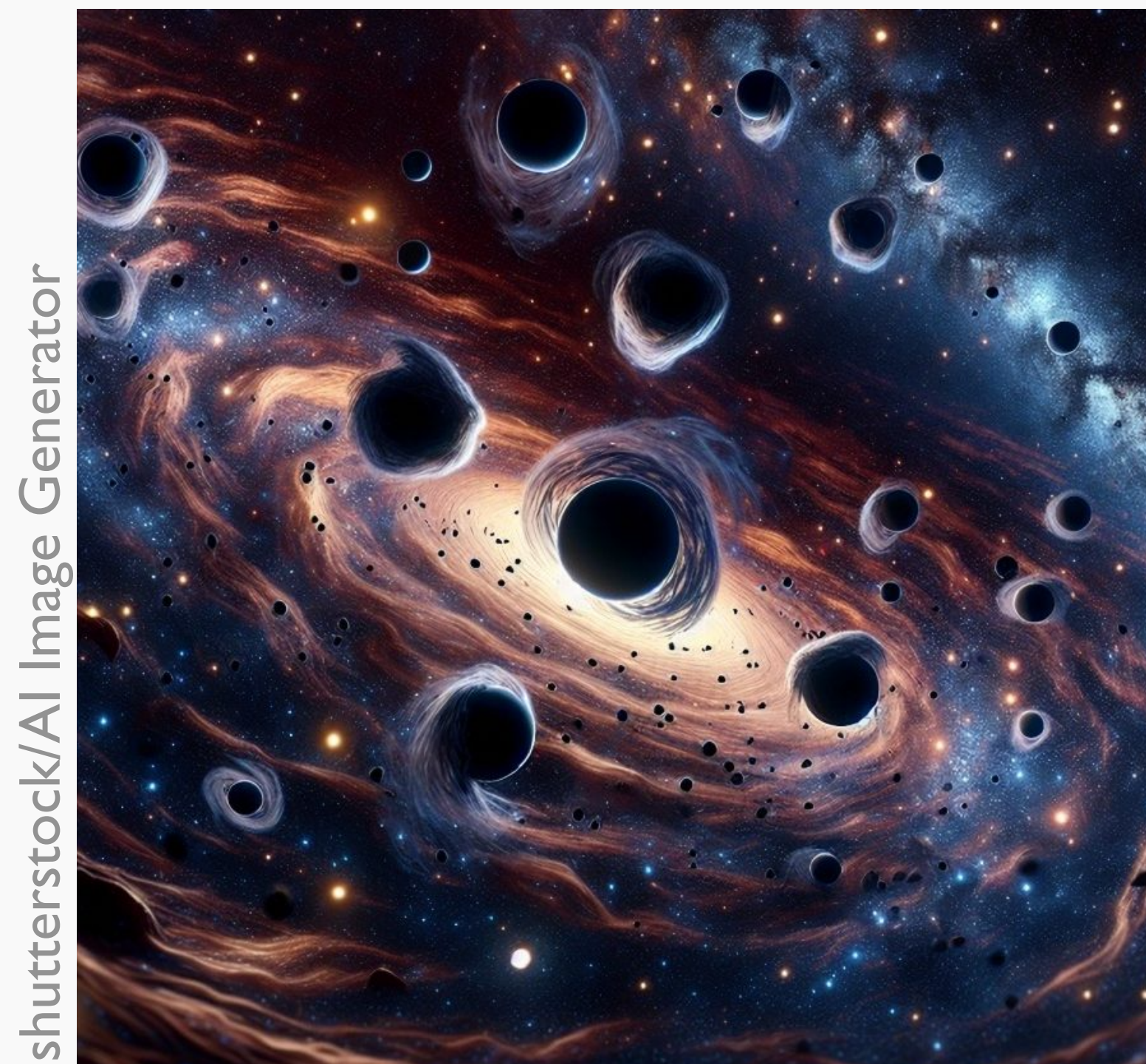
バリオンの影響を考慮した $P(k)$



- 小スケールでバリオンの影響大
- (どこまで正しい?)

ダークマター一模型の影響: 原始ブラックホール

- shot noise の大きな寄与 + shot noise (等曲率ゆらぎ) による
八口一形成促進



ダークマター—模型の影響: 軽量ダークマター (ファジーダークマター)

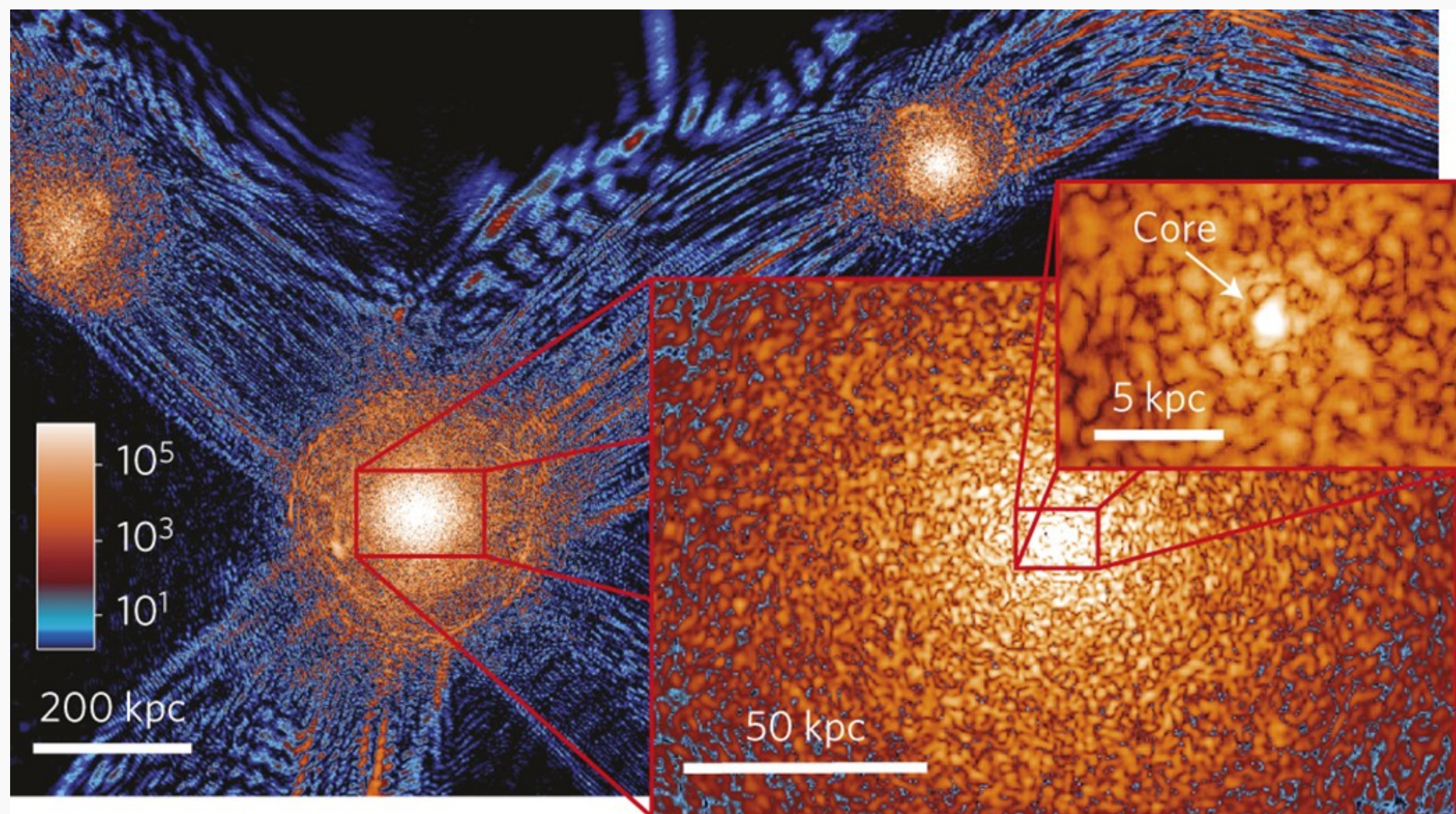
- 質量が非常に軽い場合, ダークマター粒子が波として振舞う
- 波の干渉による密度ゆらぎ → ガウス分布の重ね合わせでモデル化できる

[Kawai, MO+ Ap] **925**(2022)61]

$$\int dm \int d\mathbf{x} \frac{d^2 N_s}{dm d\mathbf{x}} \left(\frac{m}{M} \right)^2 |\tilde{u}_s(\mathbf{k} | M, m, \mathbf{x})|^2$$

$$= \frac{V_c \int d\mathbf{x} [\rho(\mathbf{x} | M)]^2}{M^2} \exp \left[- \left(\frac{\lambda_c}{2} \right)^2 k^2 \right]$$

ドブロイ波長

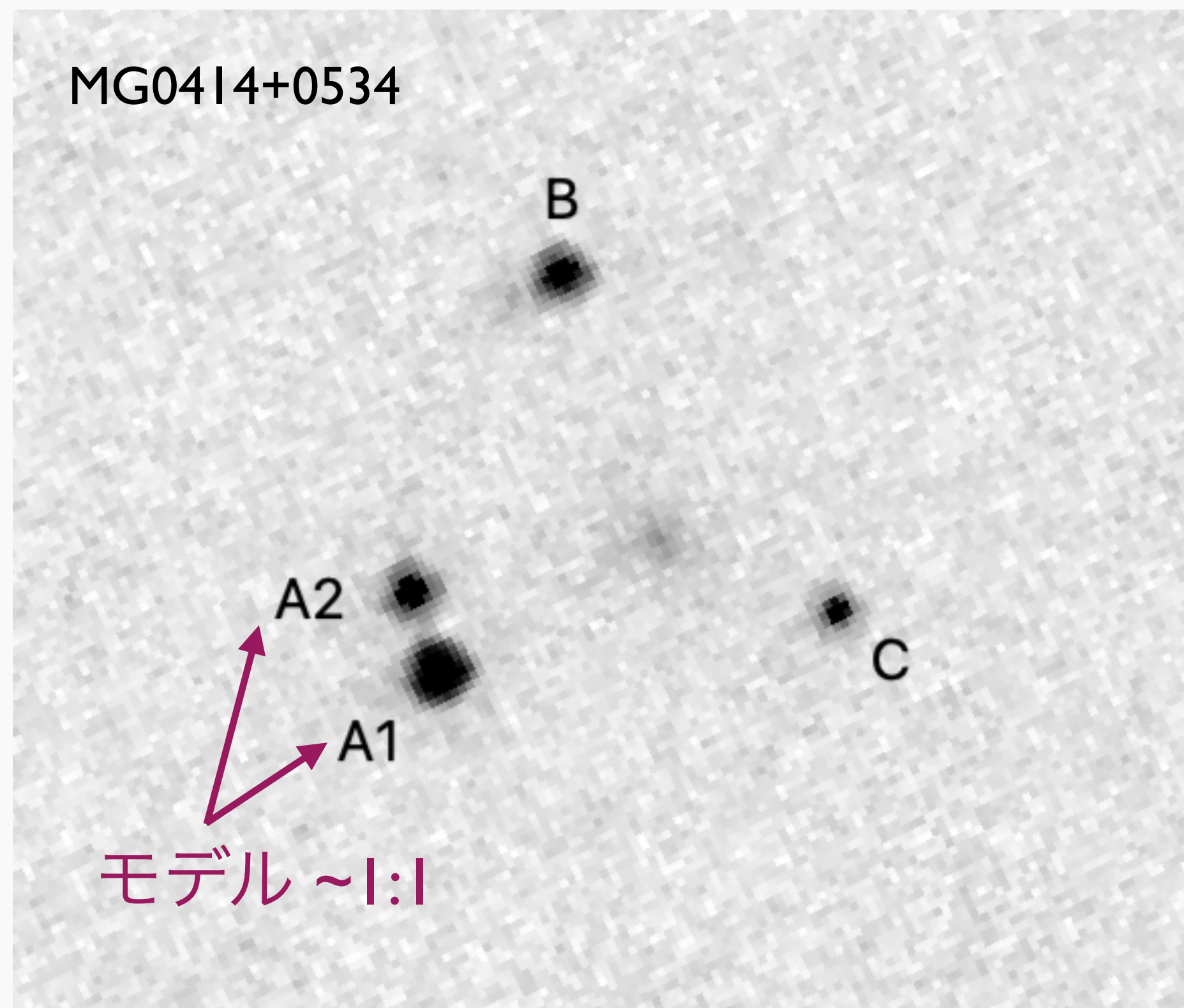


simulation (Schive+2014)

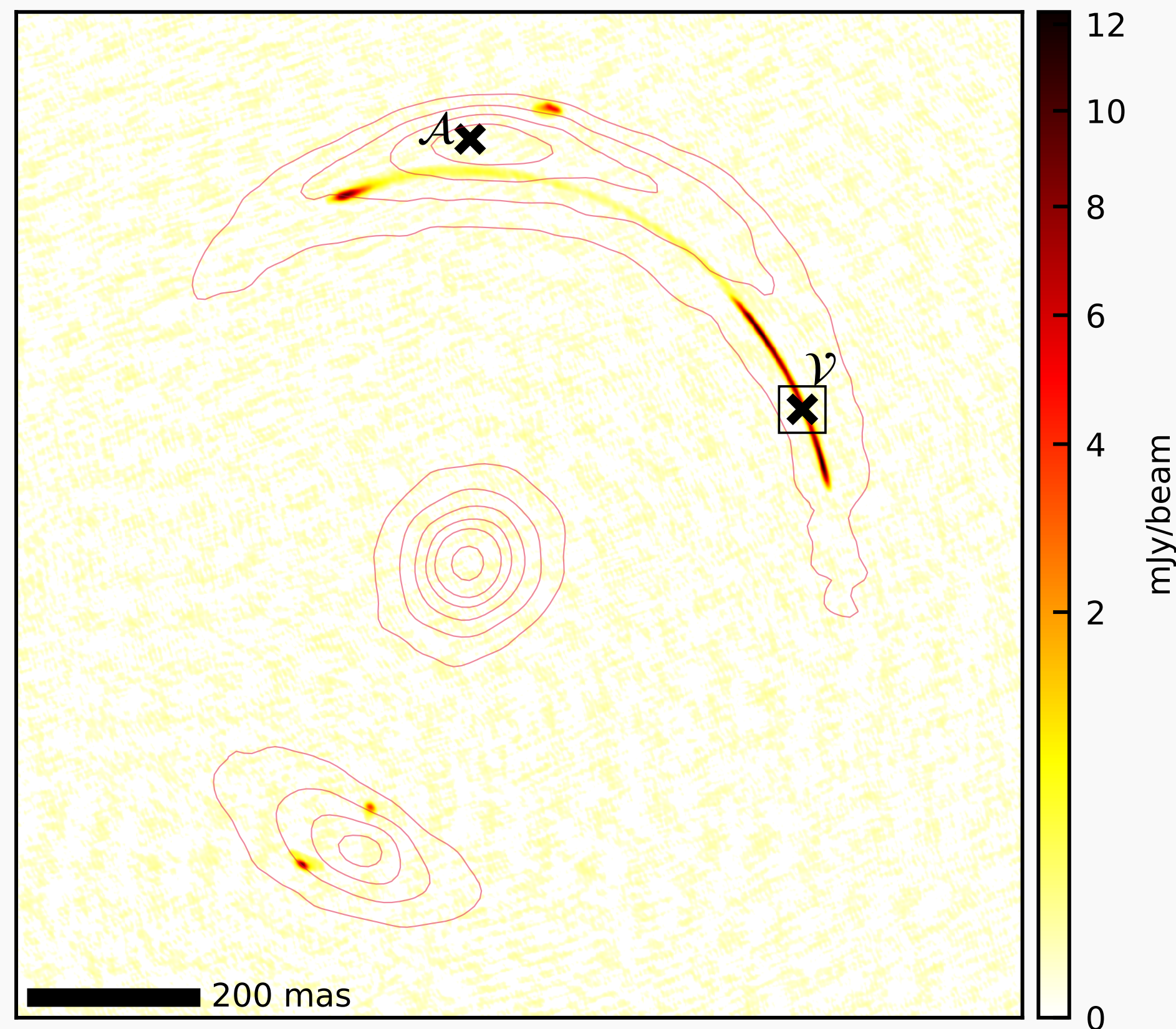
小スケールパワースペクトルの観測方法

- 強い重力レンズ複数像への摂動
- 強い重力レンズ臨界曲線への摂動
- 重力波重力レンズの波動光学効果
- ...

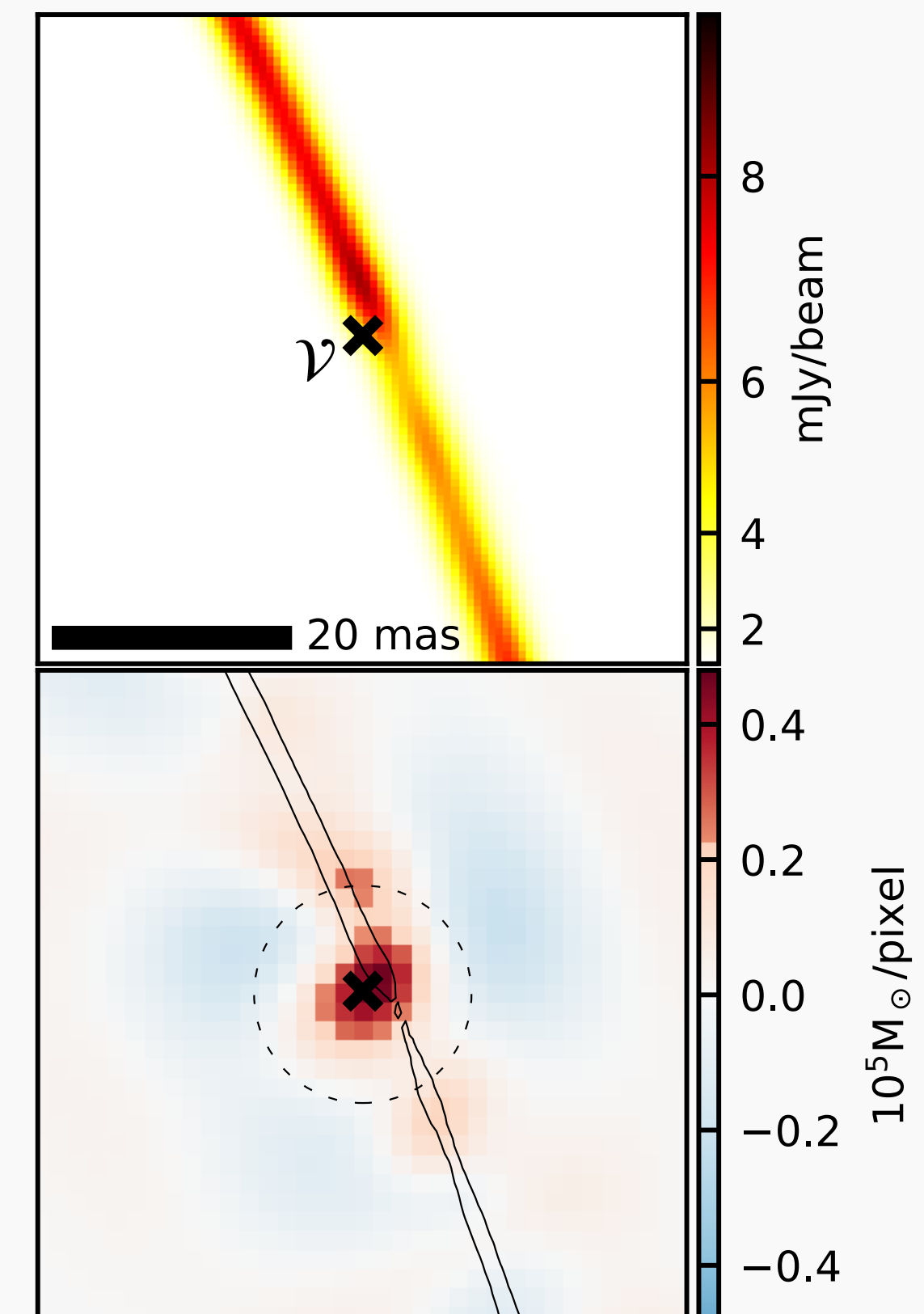
強い重力レンズ複数像への摂動



大栗「重力レンズ」(2025)



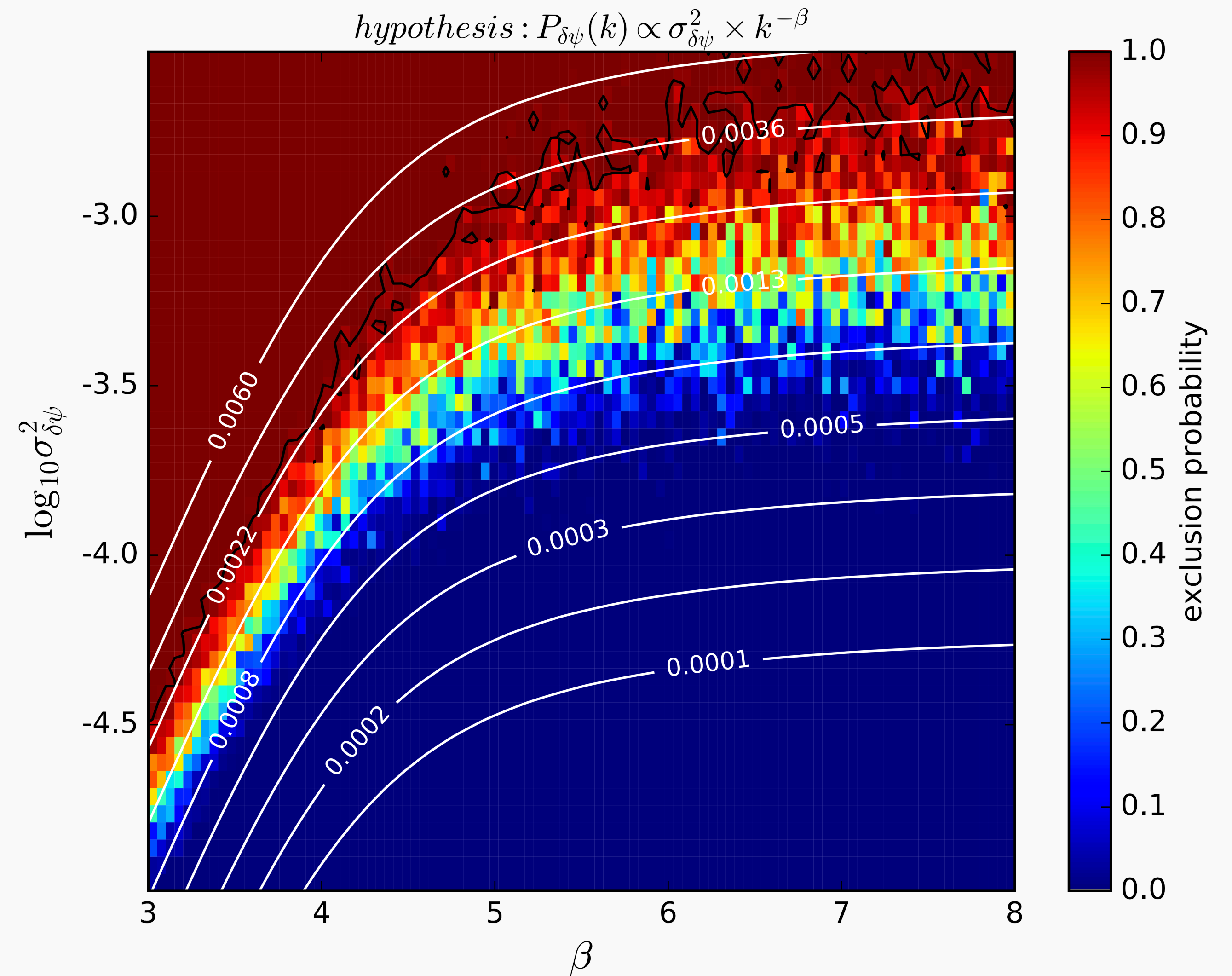
Powell+ Nat.Ast. **9**(2025)1714

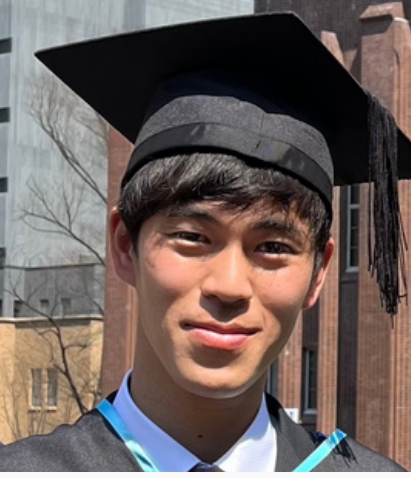


Einstein半径近傍の「局所」パワースペクトルの情報が得られる

局所パワースペクトルの測定例

SDSS J0252+0039

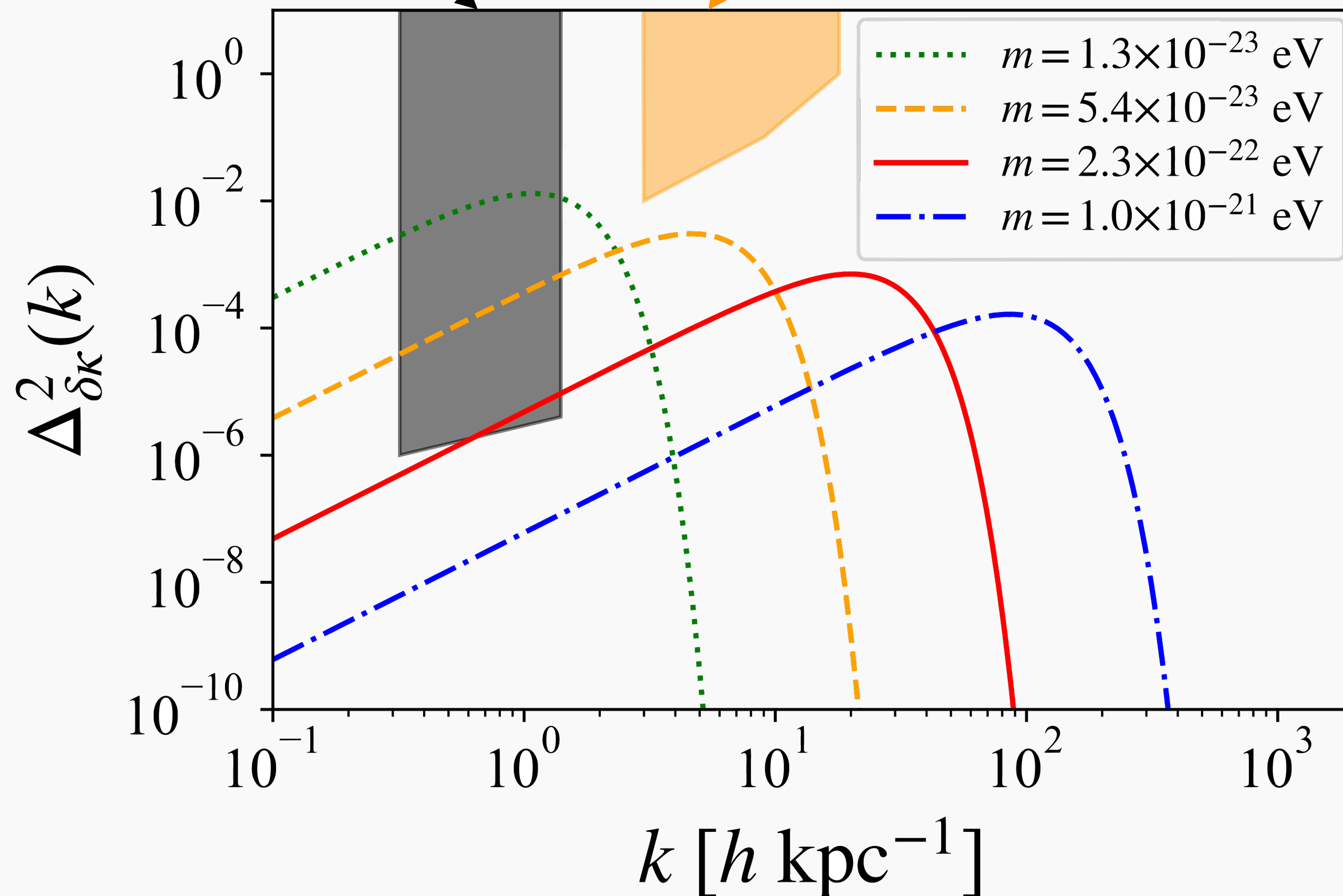




ファジーダークマターとの比較

ALMA観測で期待される
制限 (Hezaveh+2016)

Bayer+の制限 (I system)



- 2次元の局所パワースペクトルを計算し観測と比較

$$P_f(k) = \frac{V_c}{r_h(\mathbf{x})} |\tilde{u}_k|^2$$

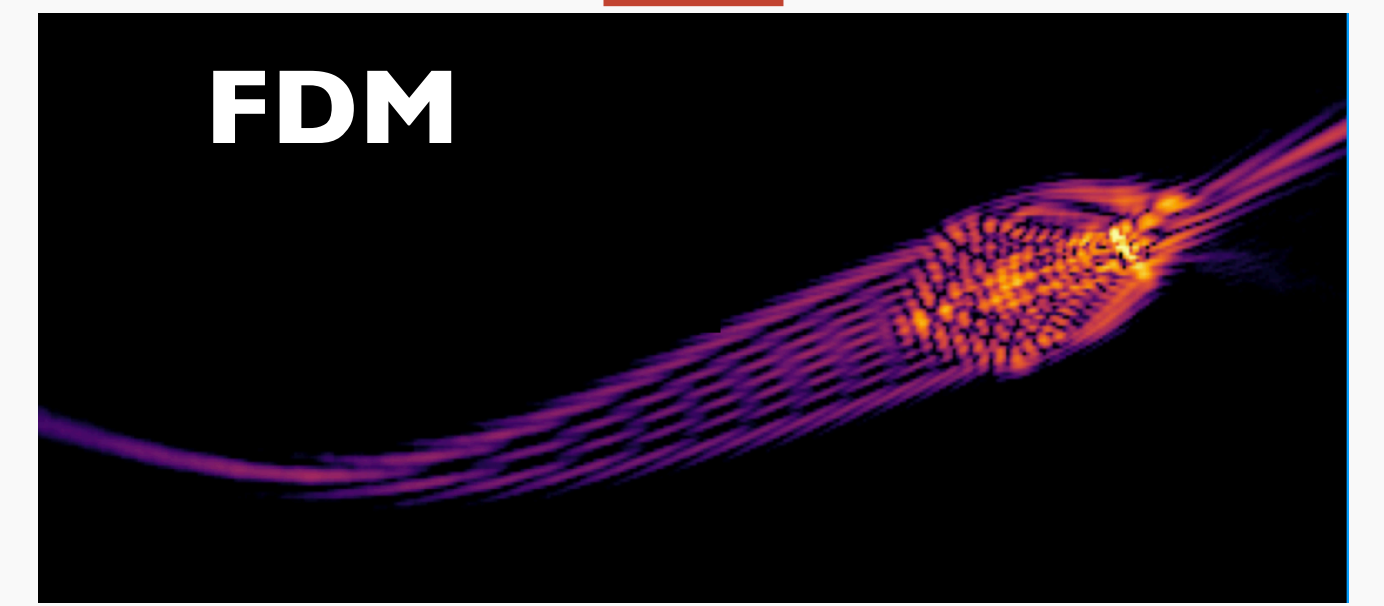
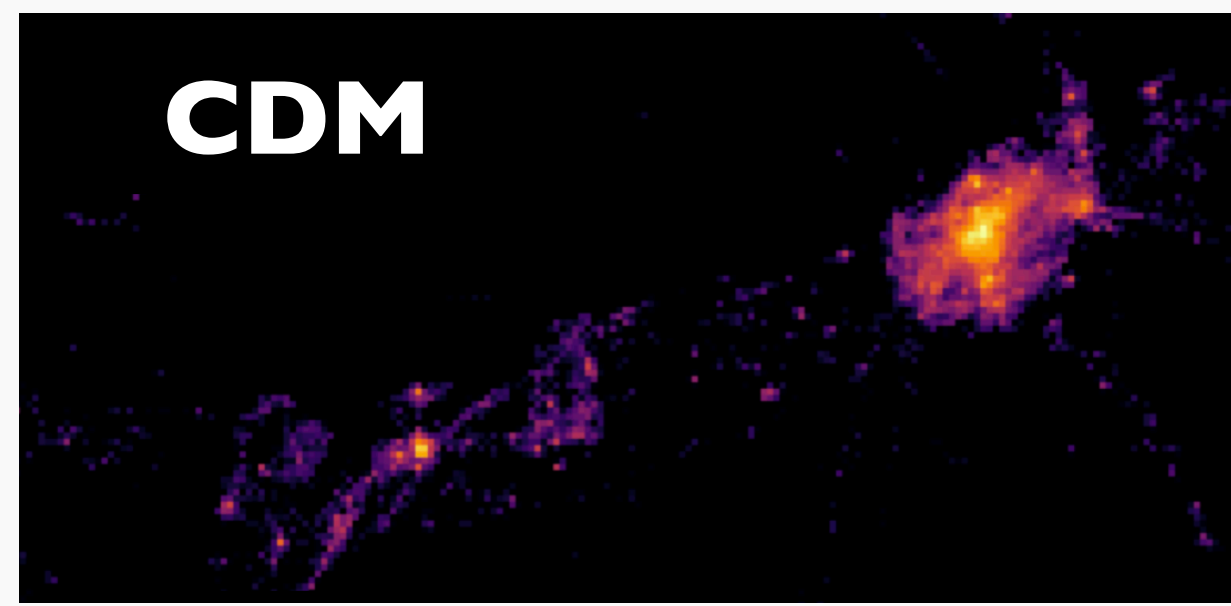
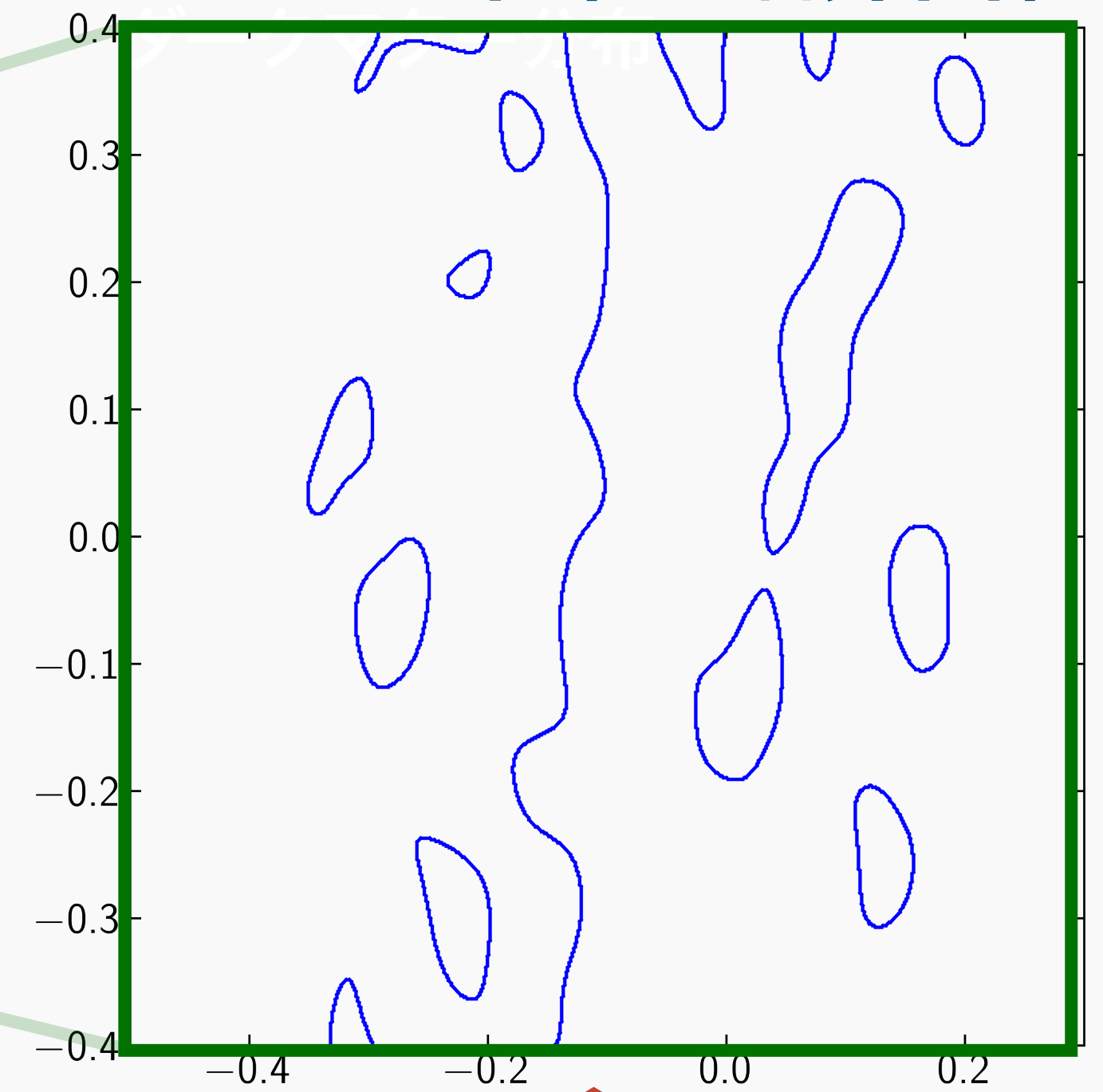
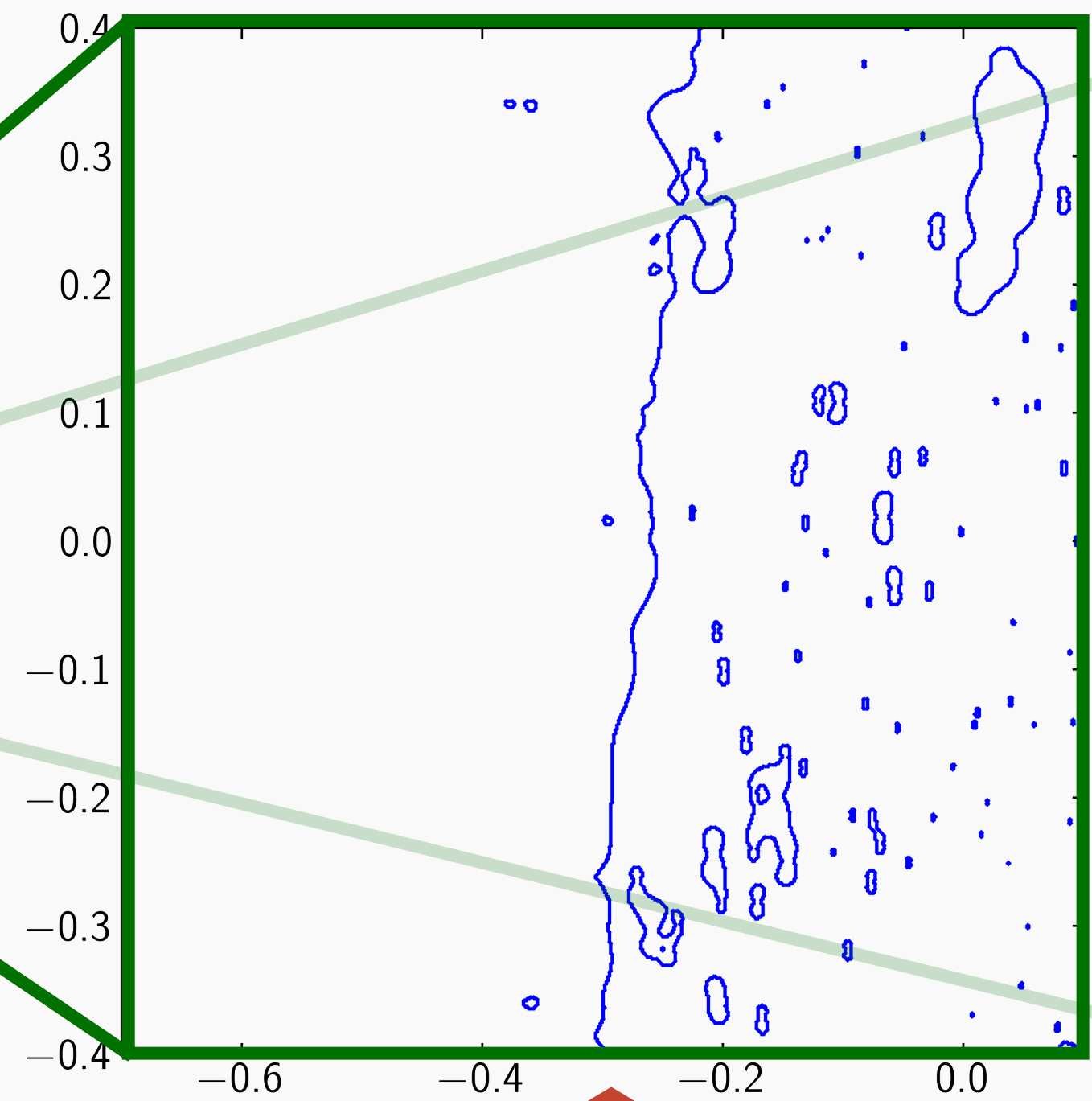
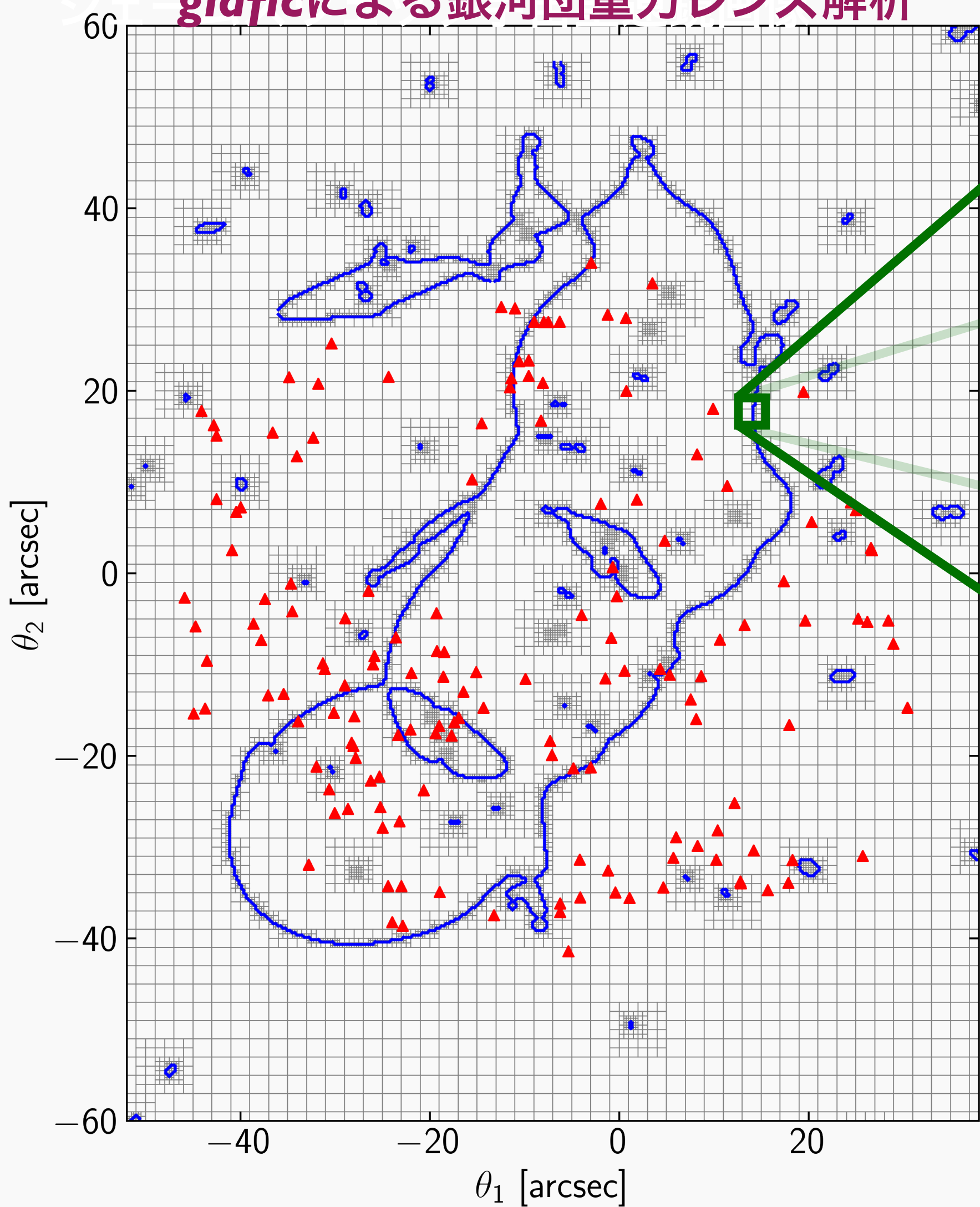
$$r_h(\mathbf{x}) = \frac{\Sigma_h^2(\mathbf{x})}{\int dz \rho_h^2(\mathbf{r})}$$

- 観測の制限は今後さらに進展

強い重力レンズ臨界曲線への摂動

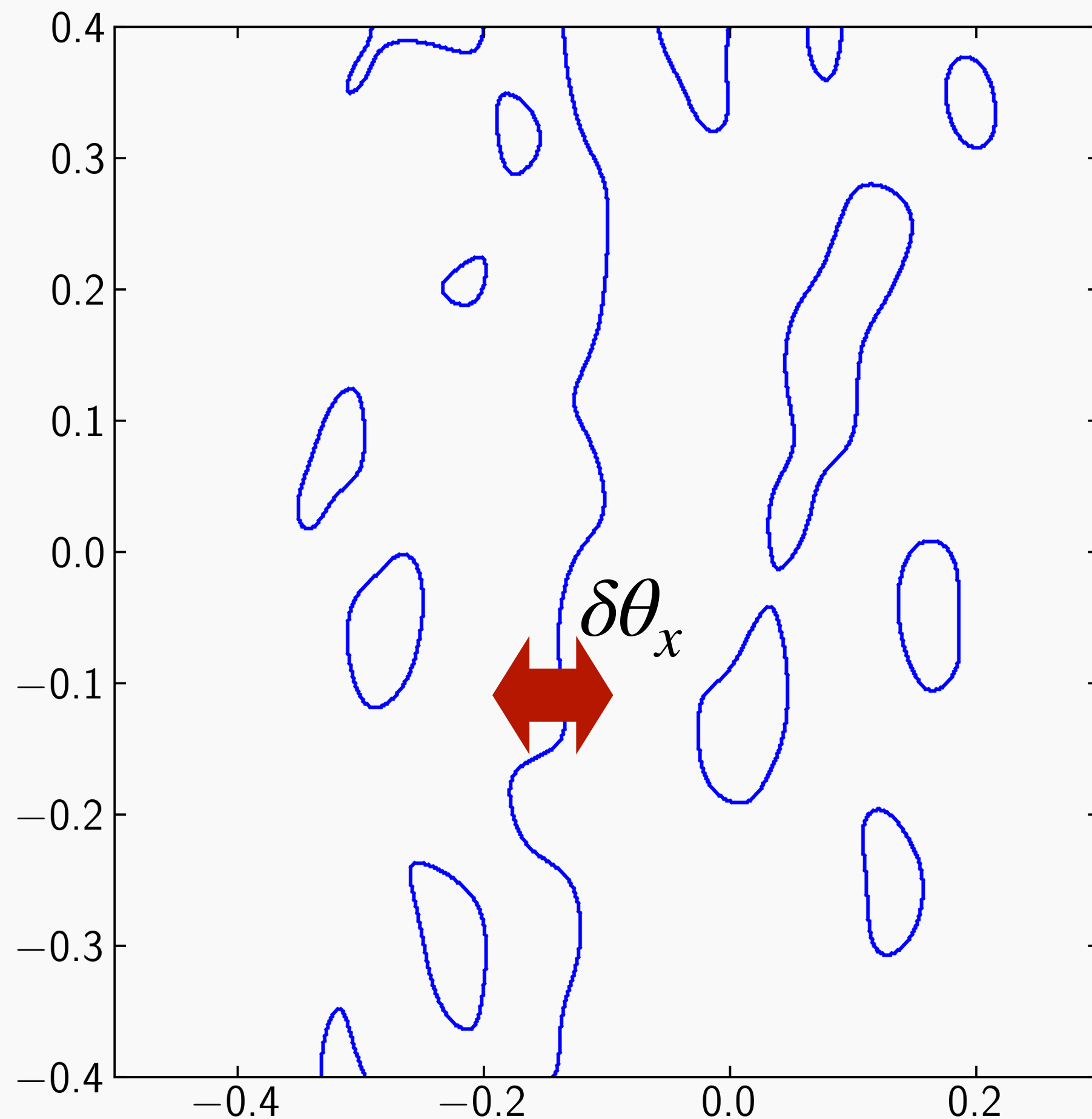
glaficによる銀河団重力レンズ解析

青線: 臨界曲線





臨界曲線ゆらぎの解析モデル



- 臨界曲線近傍のレンズポテンシャル

$$\psi(\boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{2} \left[\kappa (\theta_x^2 + \theta_y^2) + (1 - \kappa) (\theta_x^2 - \theta_y^2) \right] - \frac{\epsilon}{6} \theta_x^3$$

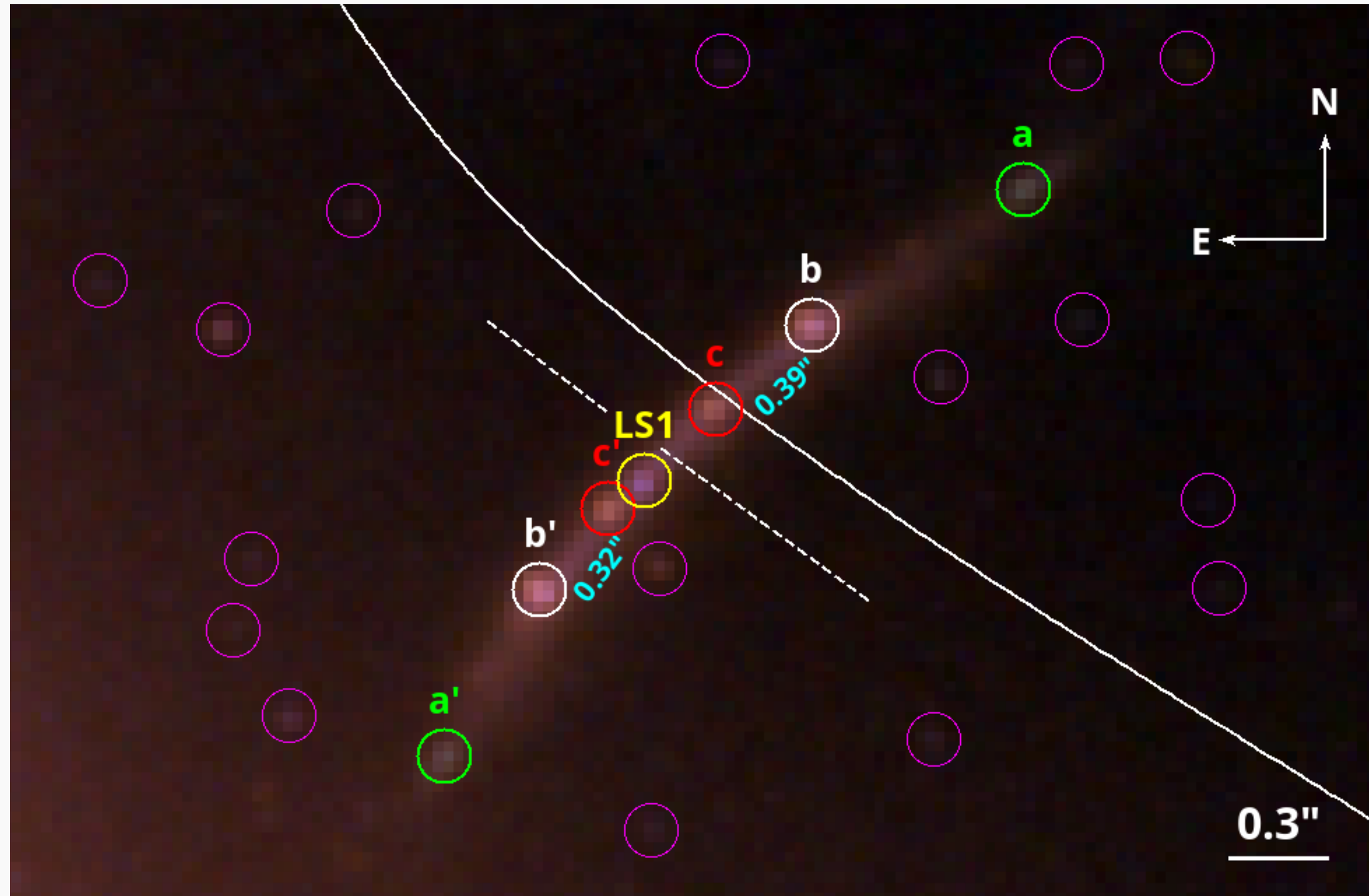
「傾き」 $\epsilon \sim 1/\theta_{\text{Ein}}$

- 臨界曲線ゆらぎ $\delta\theta_x$ のパワースペクトル

$$P_{\delta\theta_x} = \frac{3}{2\epsilon^2} P_{\delta\kappa}$$

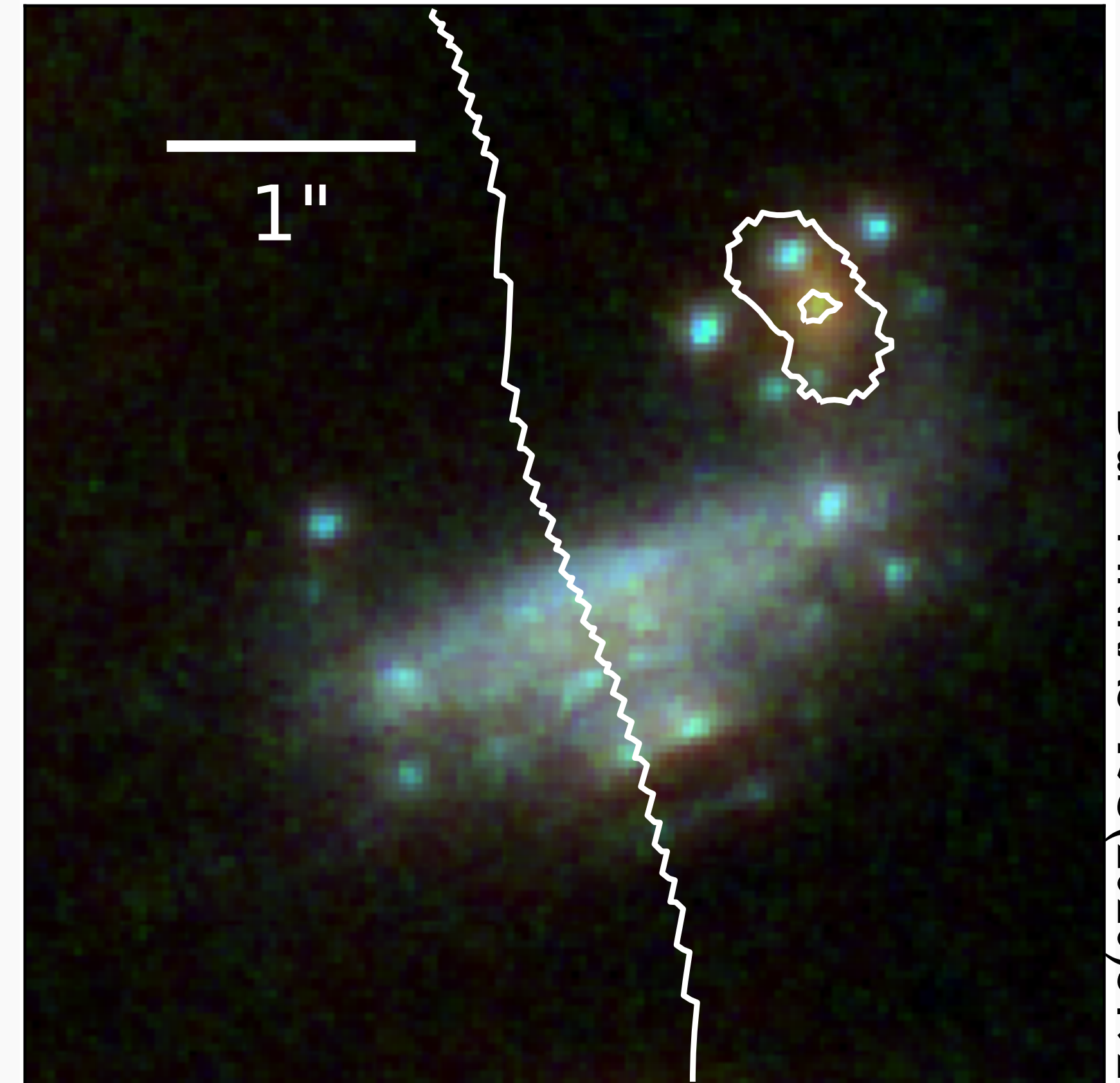
密度 (収束場) ゆらぎ局所パワースペクトル

臨界曲線ゆらぎの観測方法



Diego + A&A 679 (2023) A31

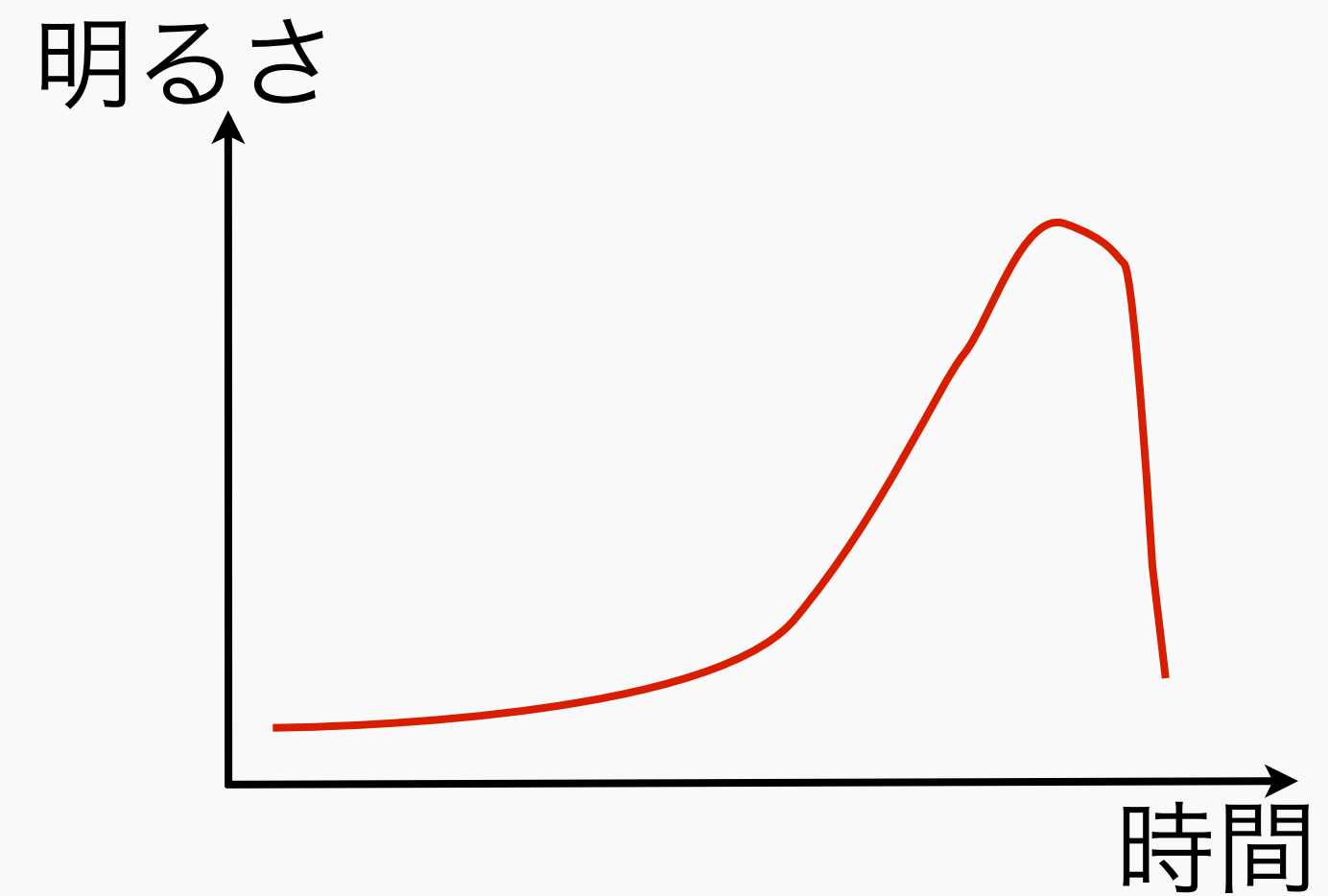
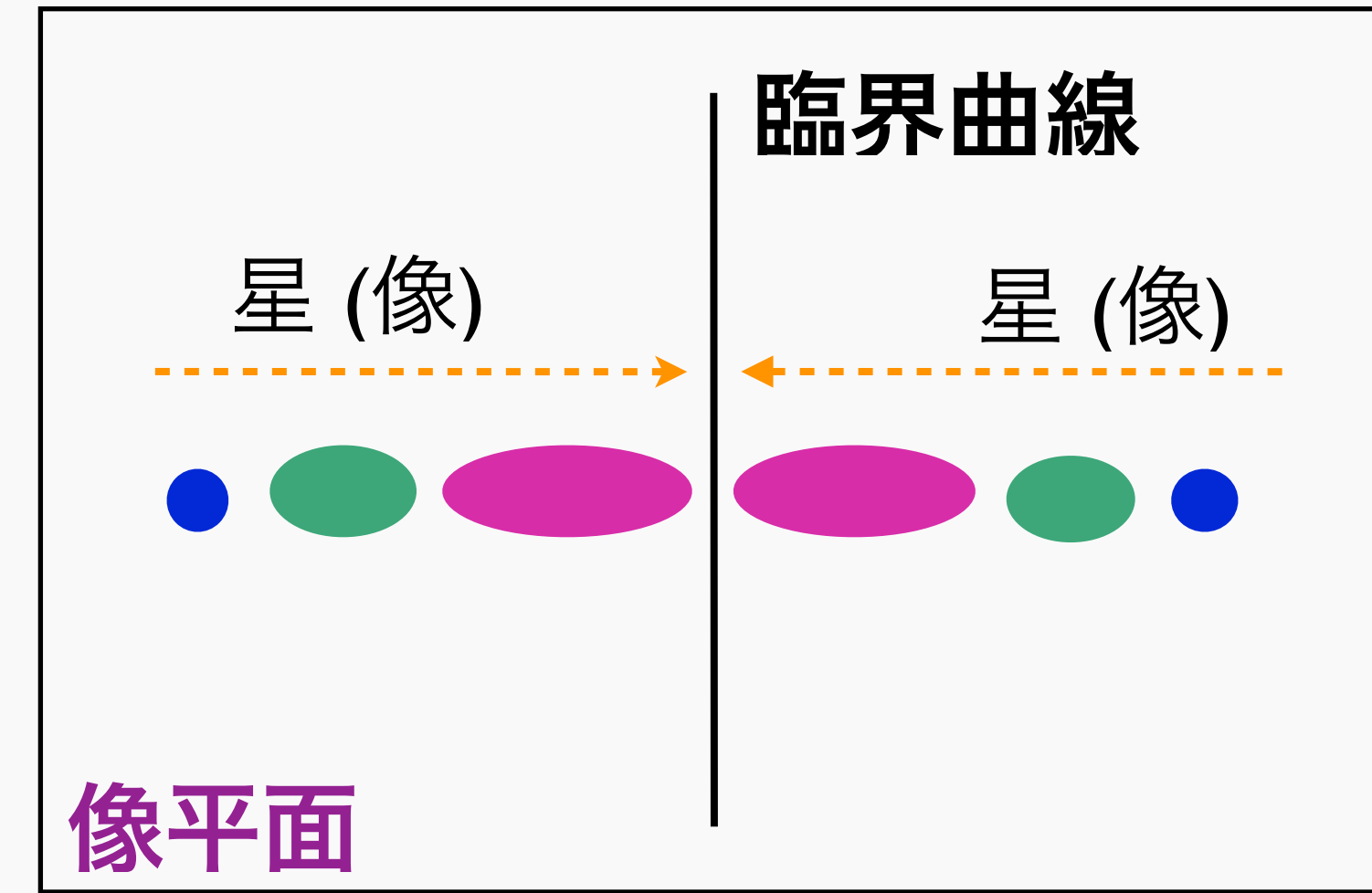
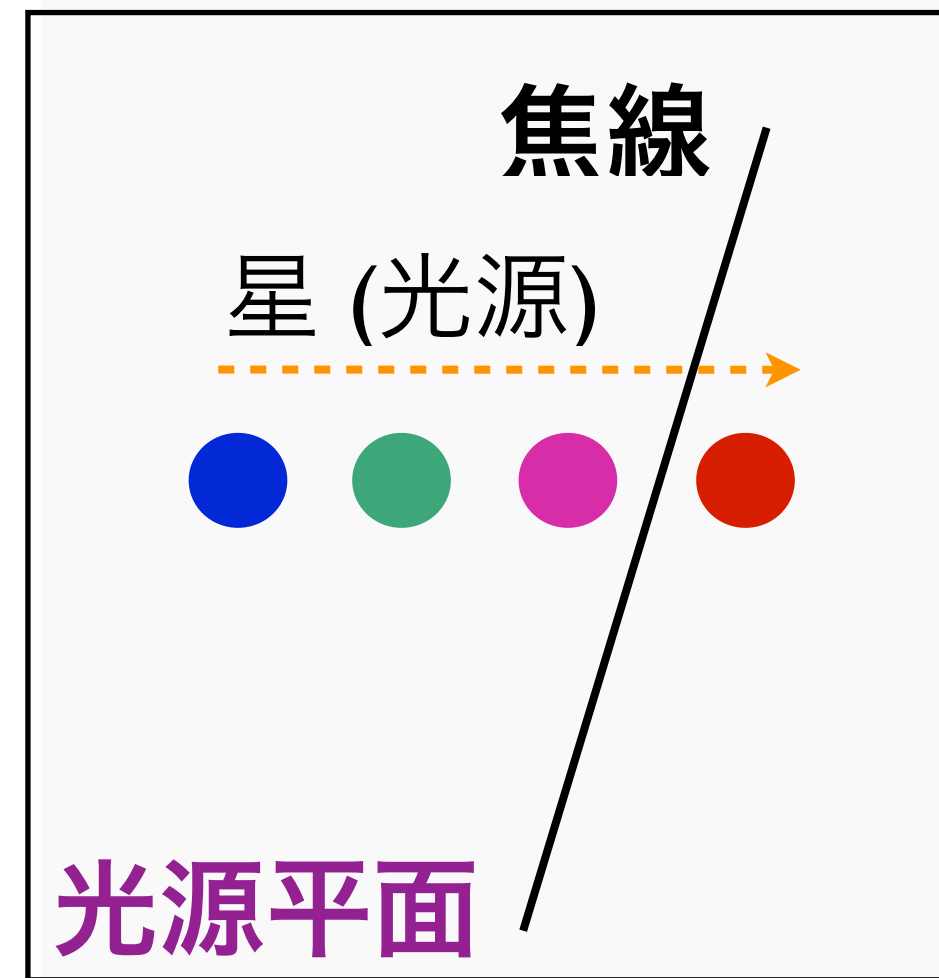
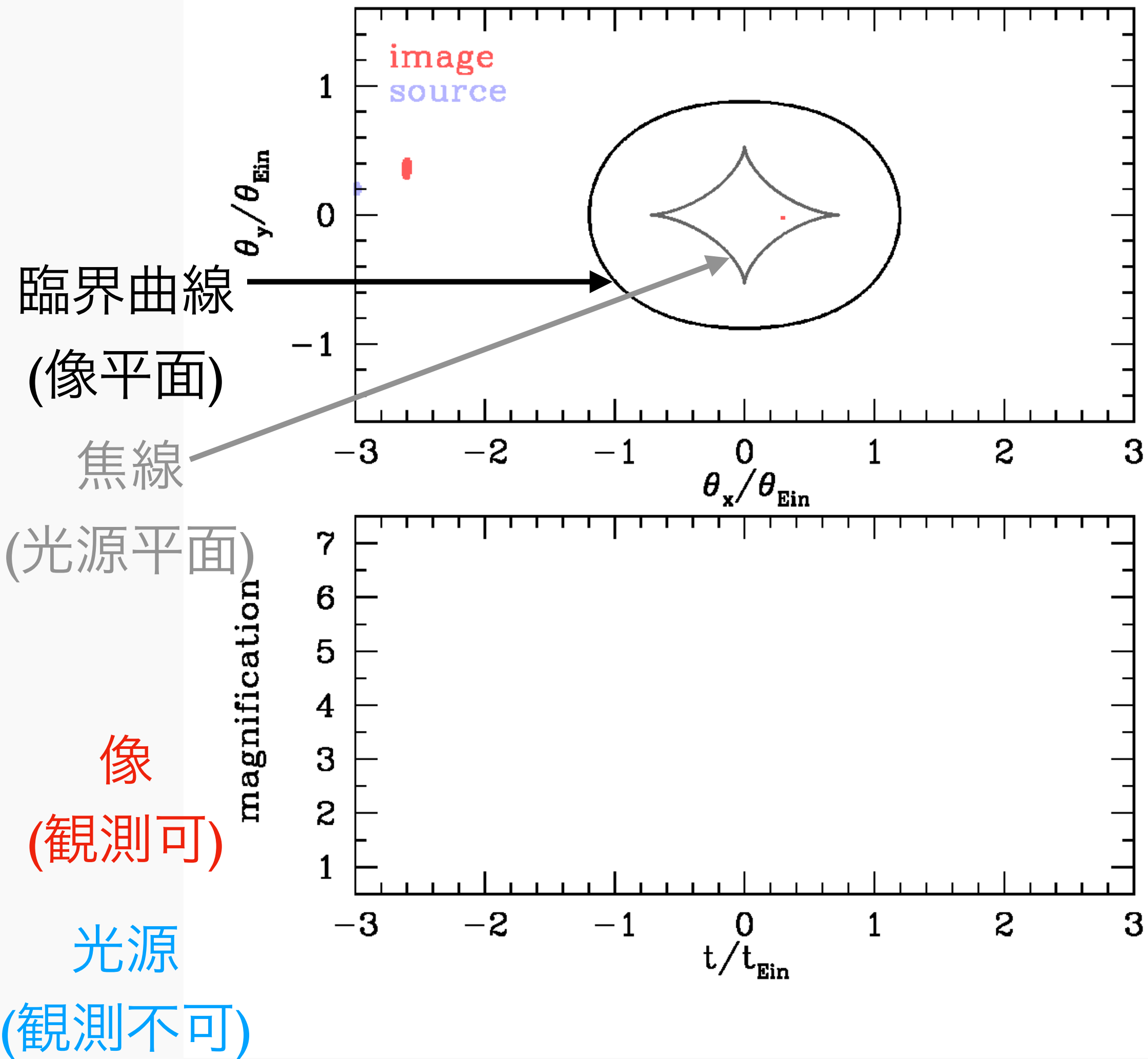
恒星の焦線通過現象



Dai + MNRAS 495 (2020) 3192

臨界曲線を跨ぐ像の非対称性

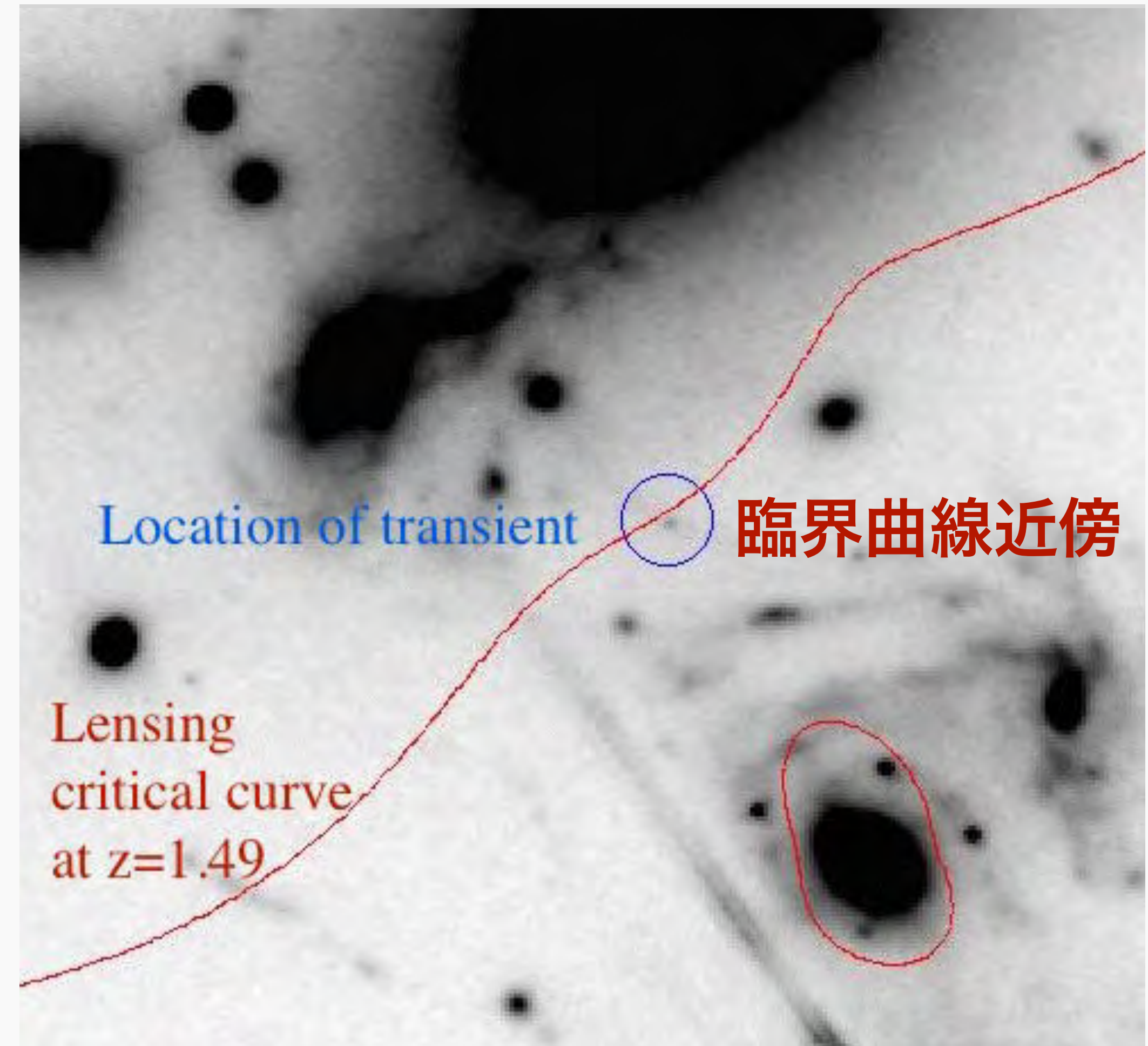
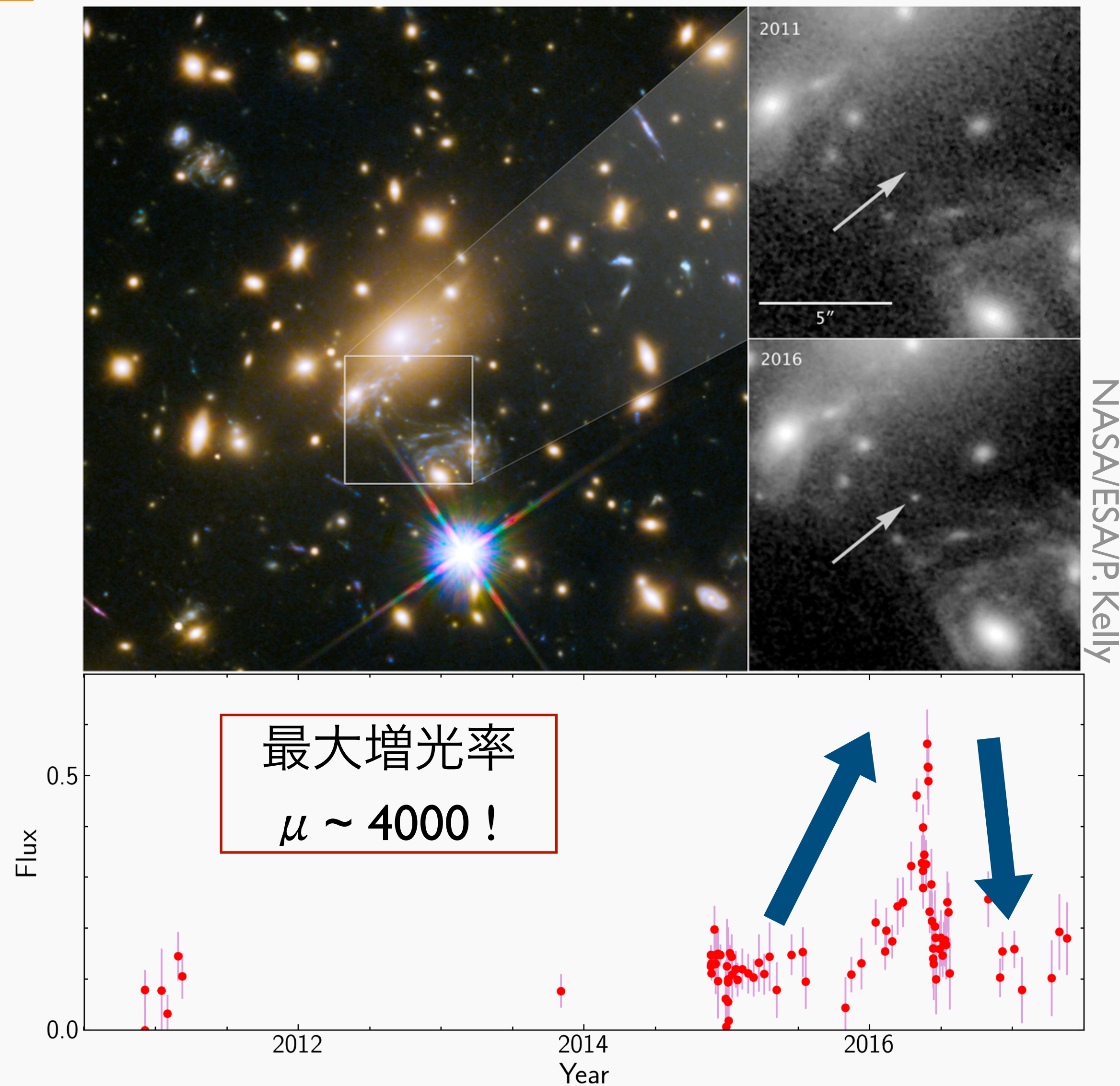
焦線通過 (caustic crossing)



- 非対称な光度曲線



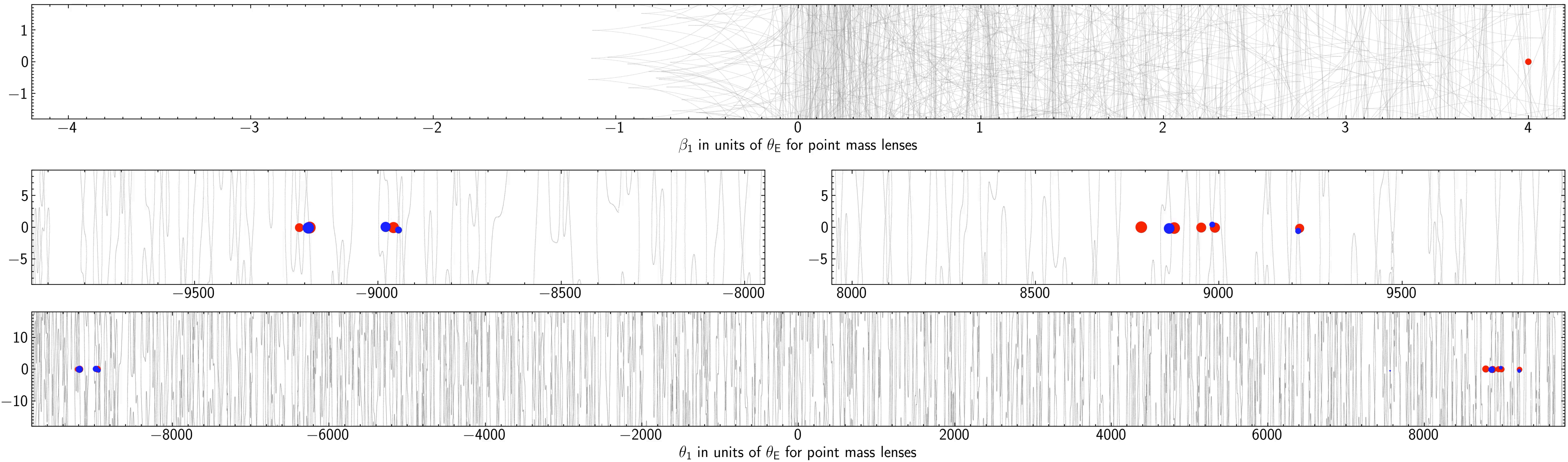
Icarusの発見



- $z=1.5$ の単独の星 (青色超巨星)



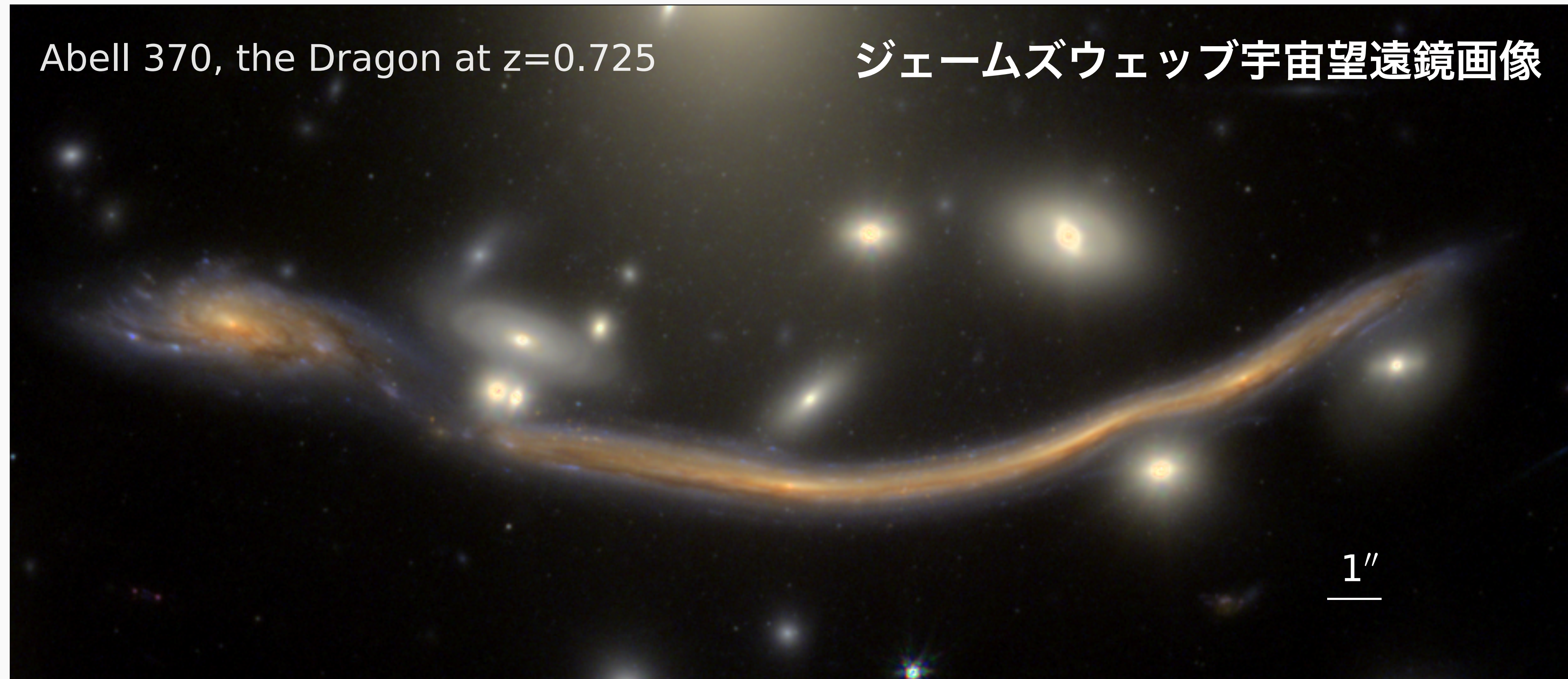
シミュレーション



micro critical curves due to intracluster light stars



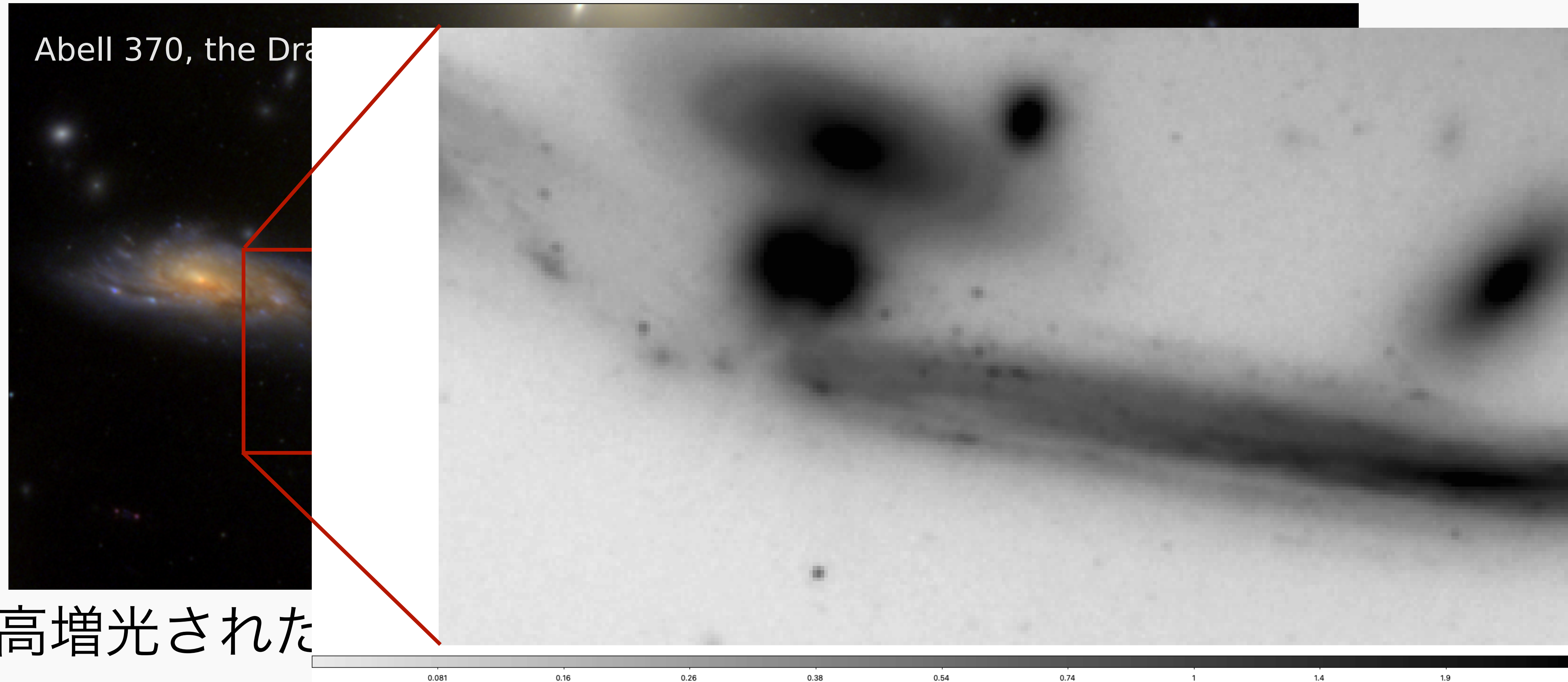
焦線通過の統計



- 超高増光された単独星を一挙に40個以上発見！
- JWSTモニタ観測 (cycle4-6, PI: 札本) により臨界曲線微細構造解明へ

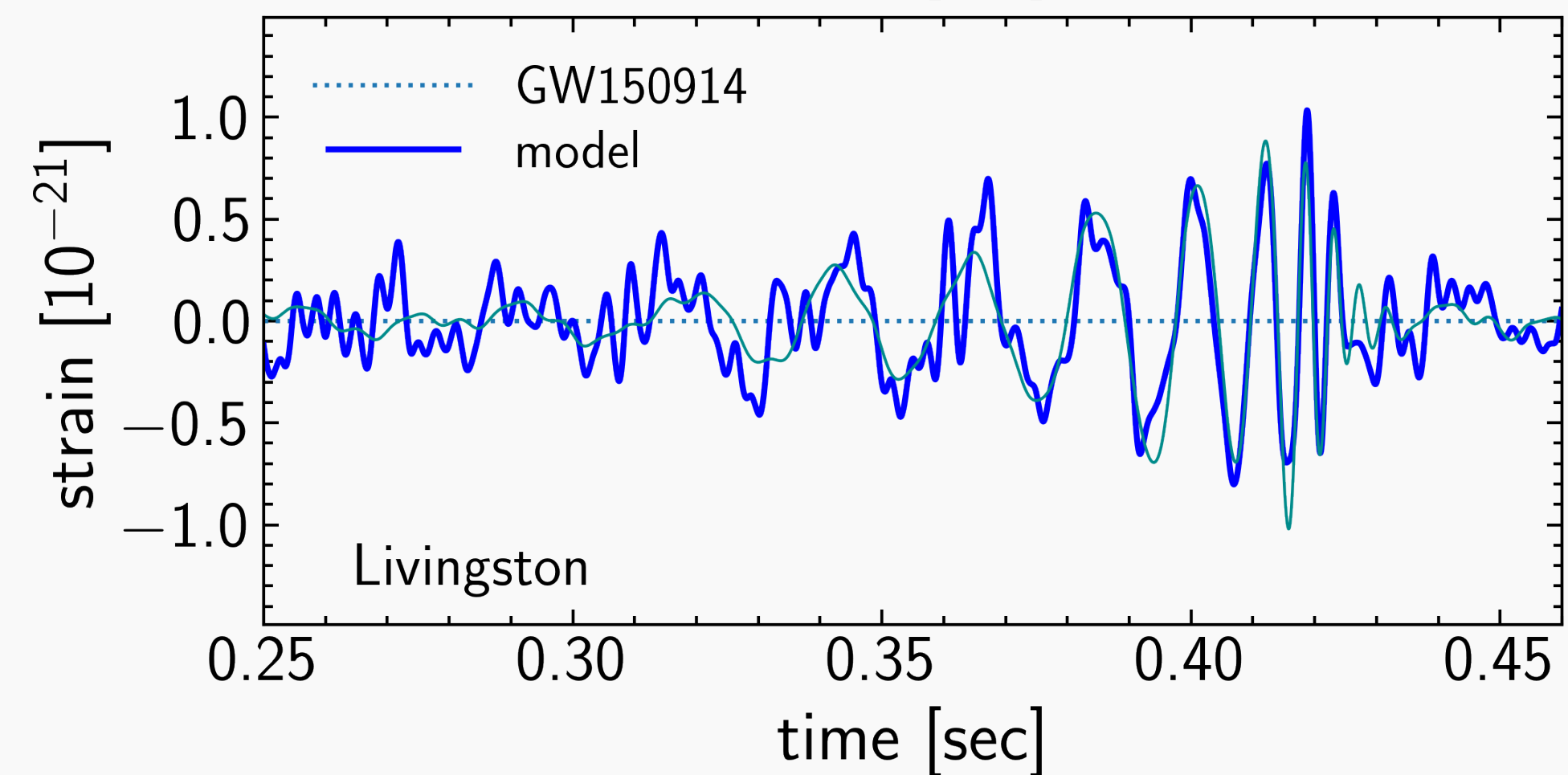
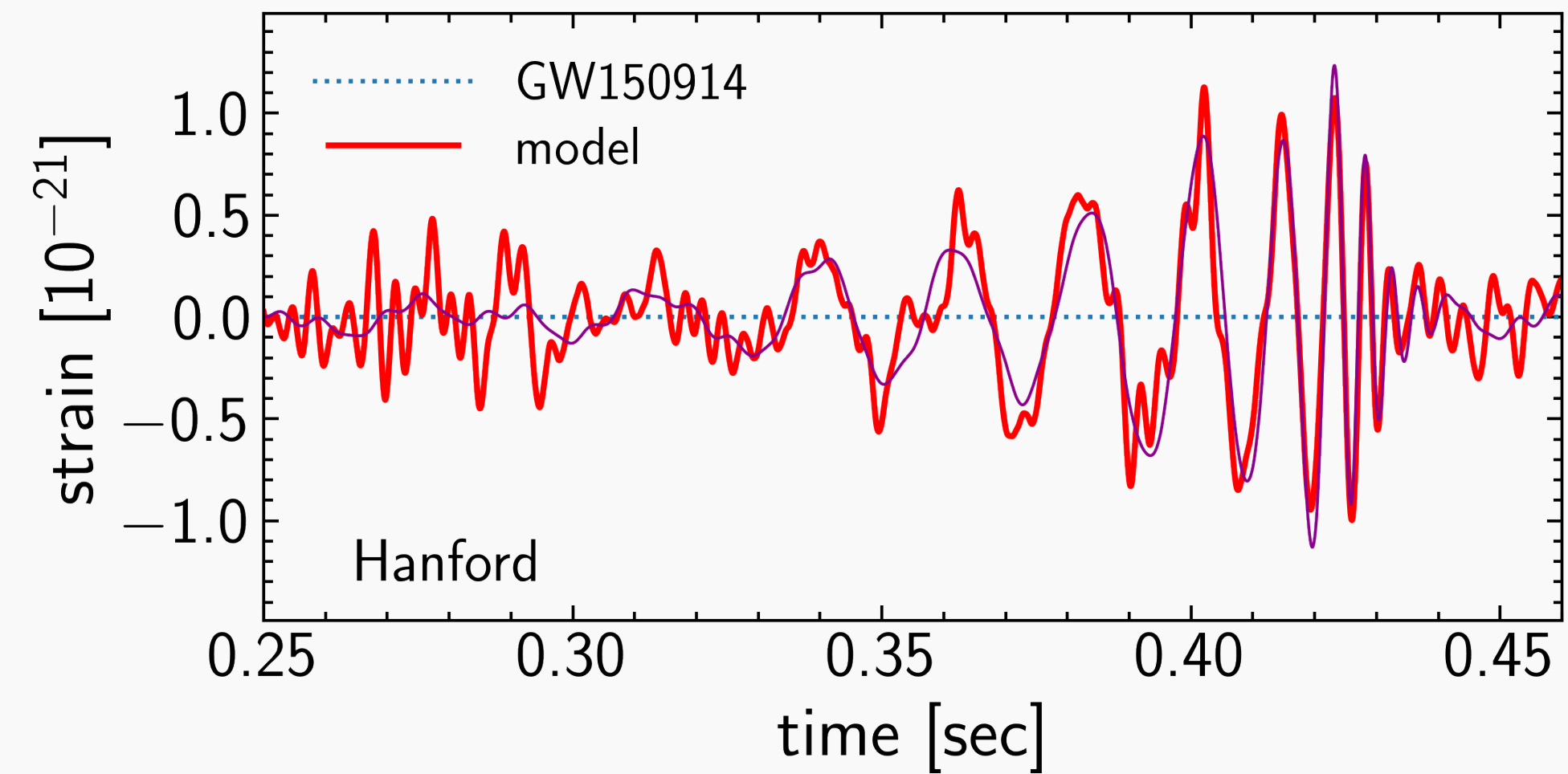
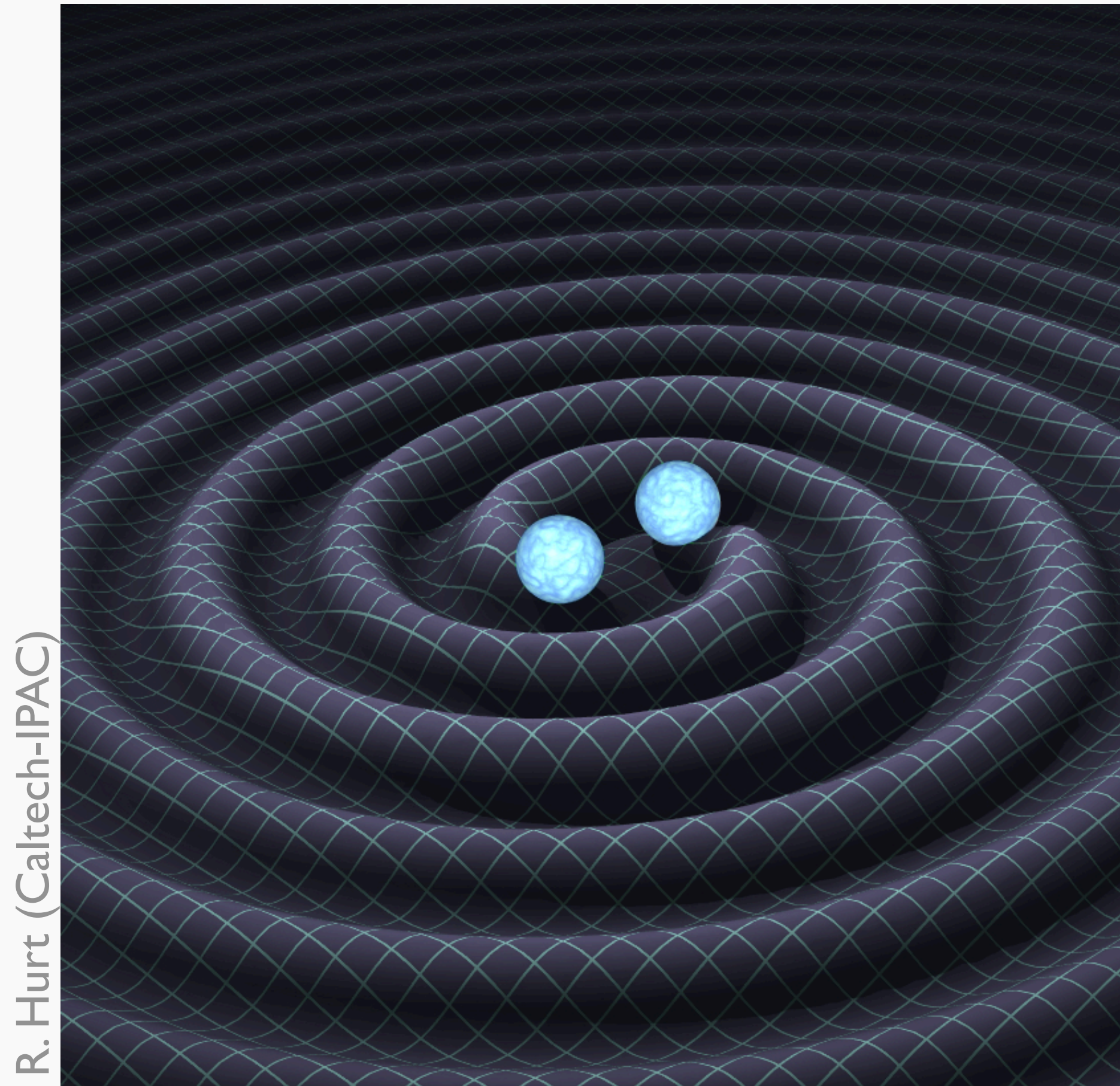


焦線通過の統計



- 超高増光された
- JWSTモニタ観測 (cycle4-6, PI: 札本) により臨界曲線微細構造解明へ

連星合体重力波



**2015年に
初発見！**

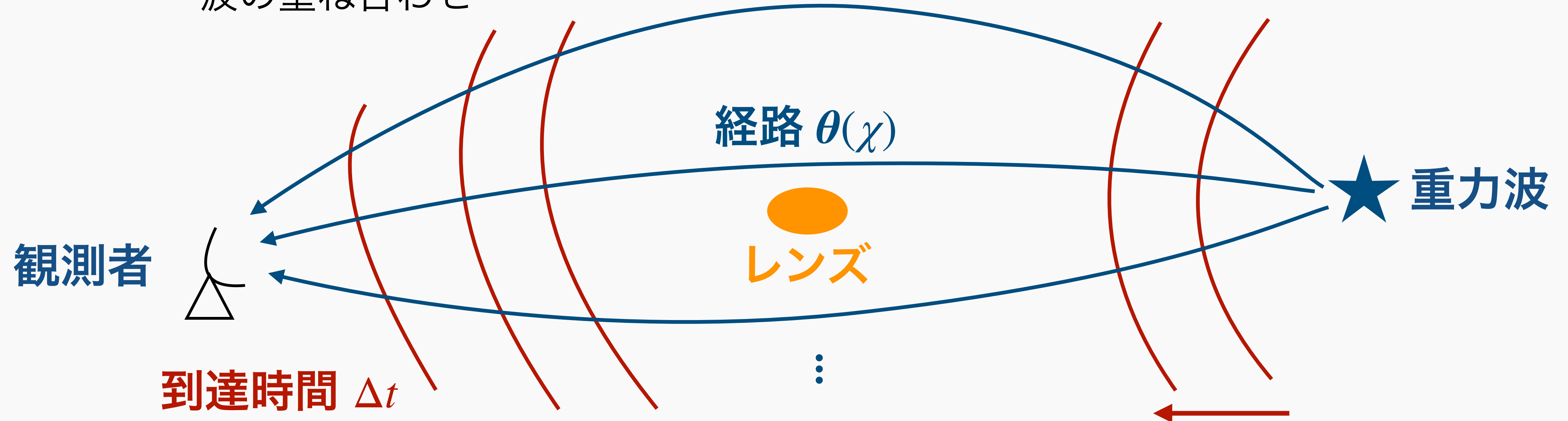
天体物理学だけではなく宇宙論にとってもたいへん有用

波動光学重力レンズ

波動光学

波の重ね合わせ

$$\phi \propto \int \mathcal{D} [\theta(\chi)] e^{2\pi i f \Delta t}$$

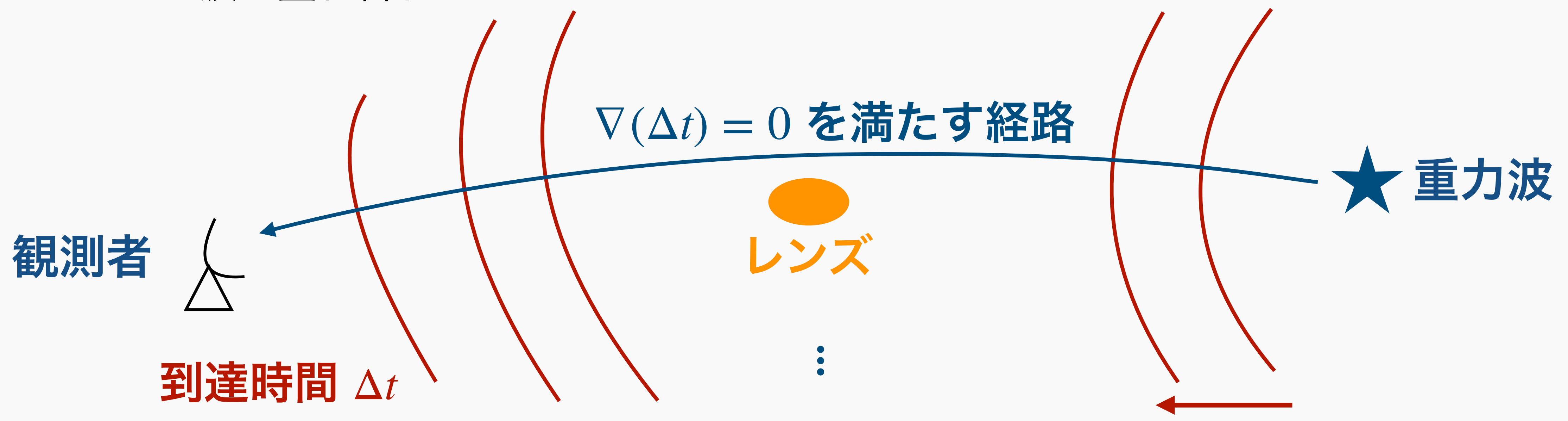


波動光学重力レンズ

波動光学

波の重ね合わせ

$$\phi \propto \int \mathcal{D} [\theta(\chi)] e^{2\pi i f \Delta t}$$



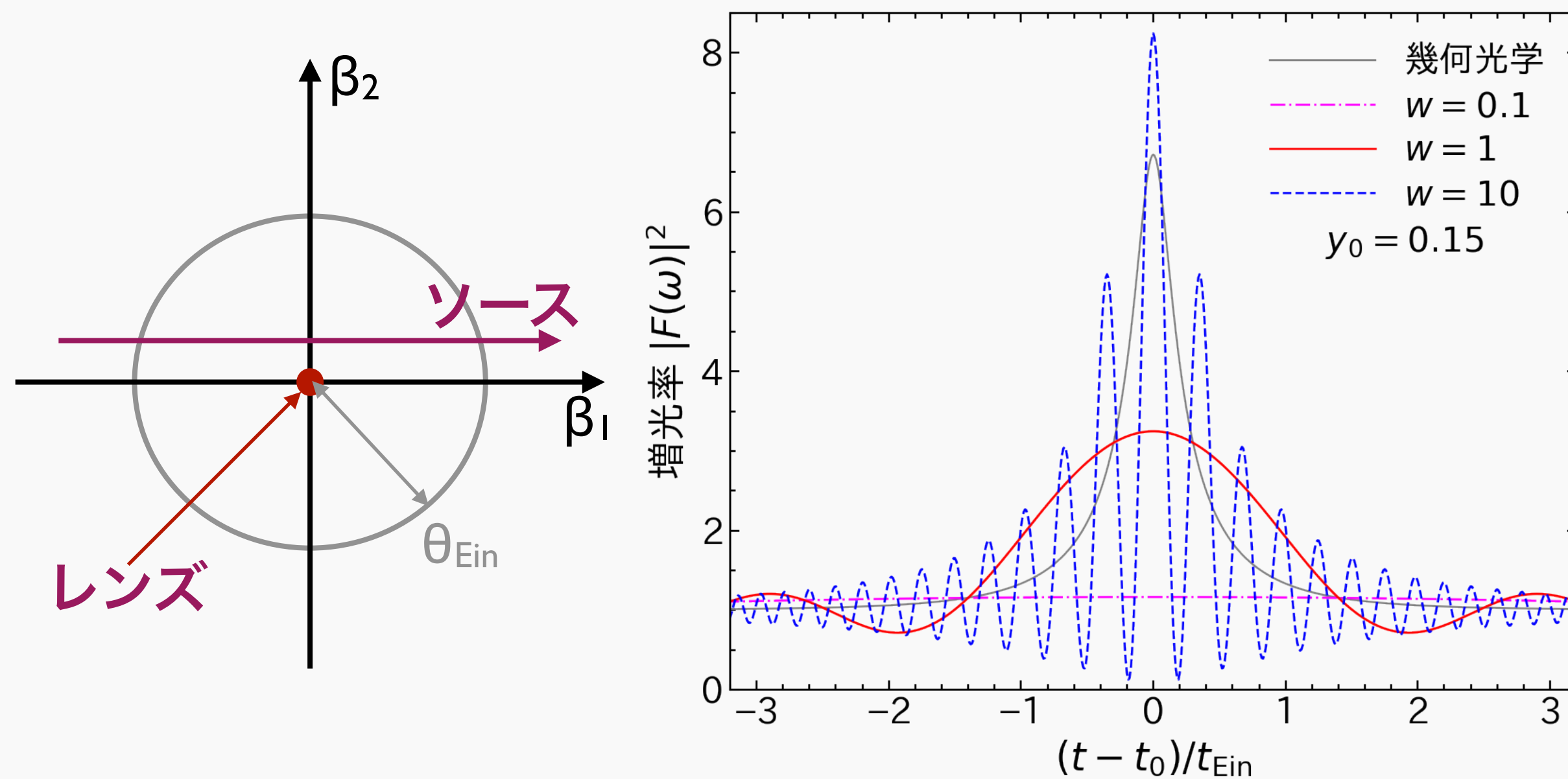
幾何光学

$$\nabla(\Delta t) = 0$$

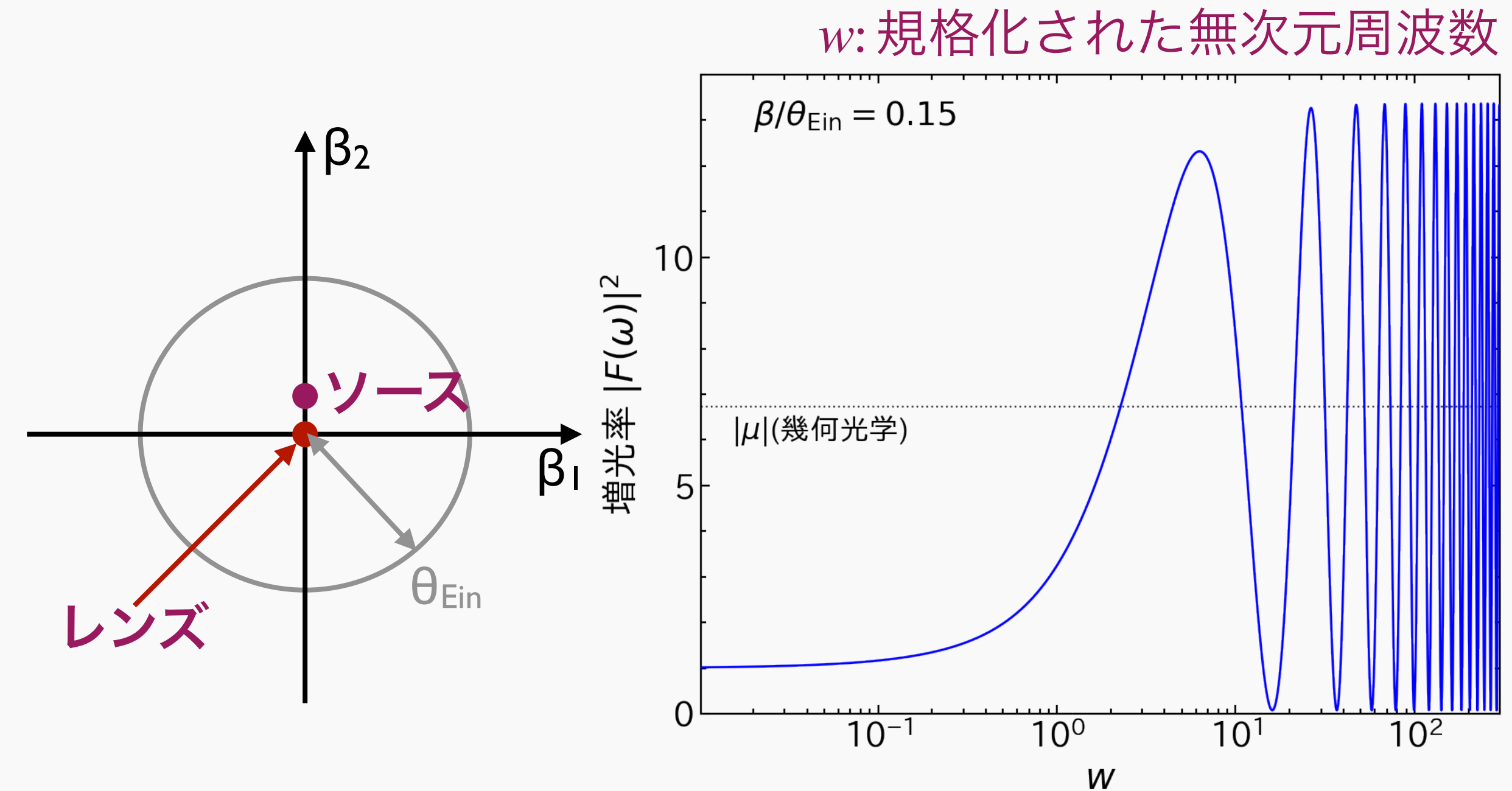
フェルマーの原理

周波数 f が大きい極限では Δt の停留点のみ寄与

波動光学重力レンズの例



周波数を固定してソース位置が移動した時の増光率

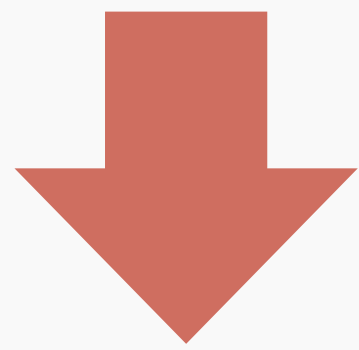


ソース位置を固定して周波数が増えた時の増光率

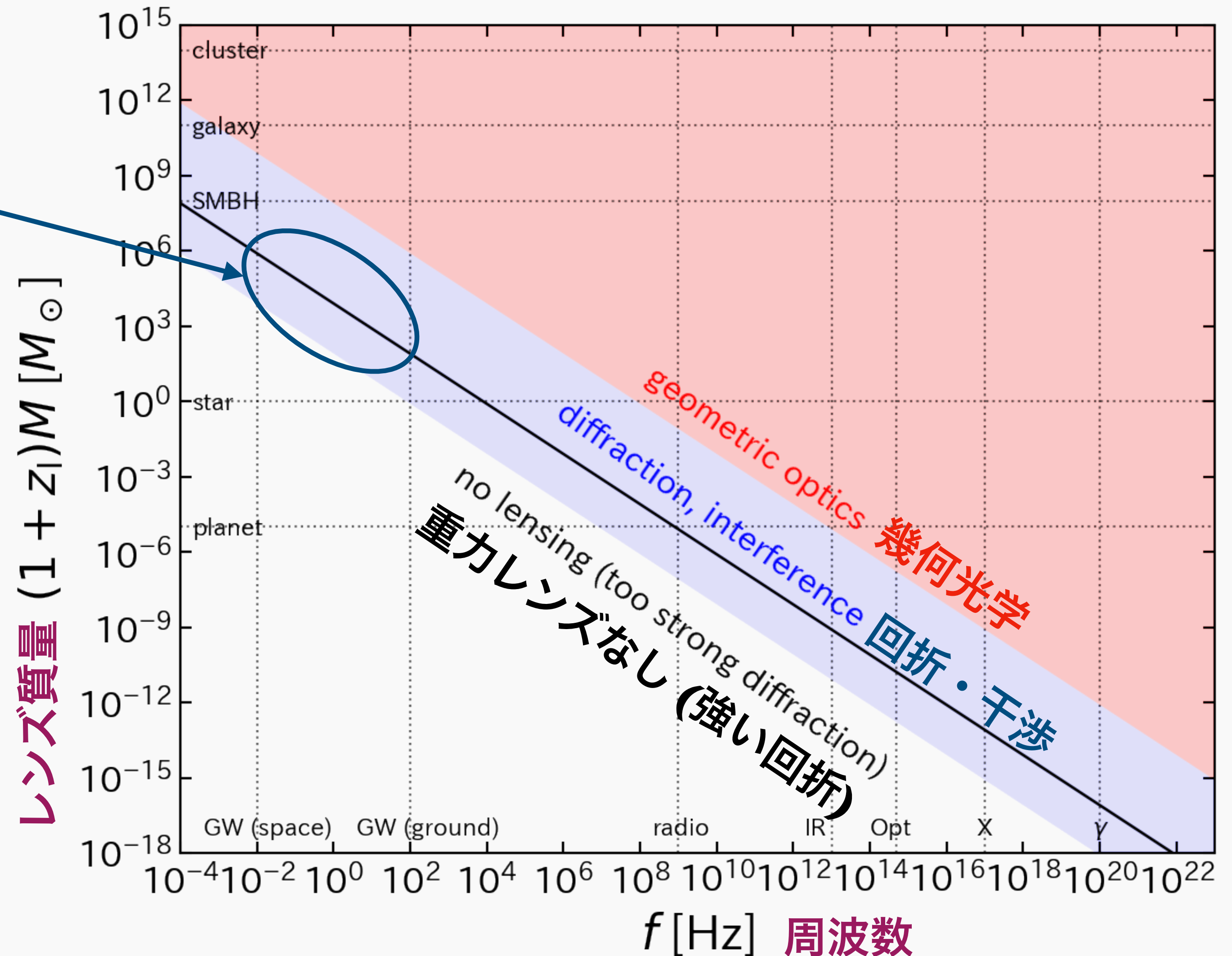
連星合体重力波の周波数の時間進化を利用して検出可能

波動光学効果は観測されるか？

重力波の場合に
波動光学効果が
観測される範囲



ダークマター
小質量ハロー
($M \sim 10^0 - 4 M_{\odot}$)



ボルン近似

- ダークマター小質量ハローの重力レンズ信号は弱い
→ **ボルン近似**を用いた計算が便利

Takahashi+ A&A **438**(2005)L5

Takahashi ApJ **644**(2006)80

MO & Takahashi ApJ **901** (2020)58

Choi+ Phys. Rev. D **104**(2021)063001

MO & Takahashi Phys. Rev. D **901** (2022)043532

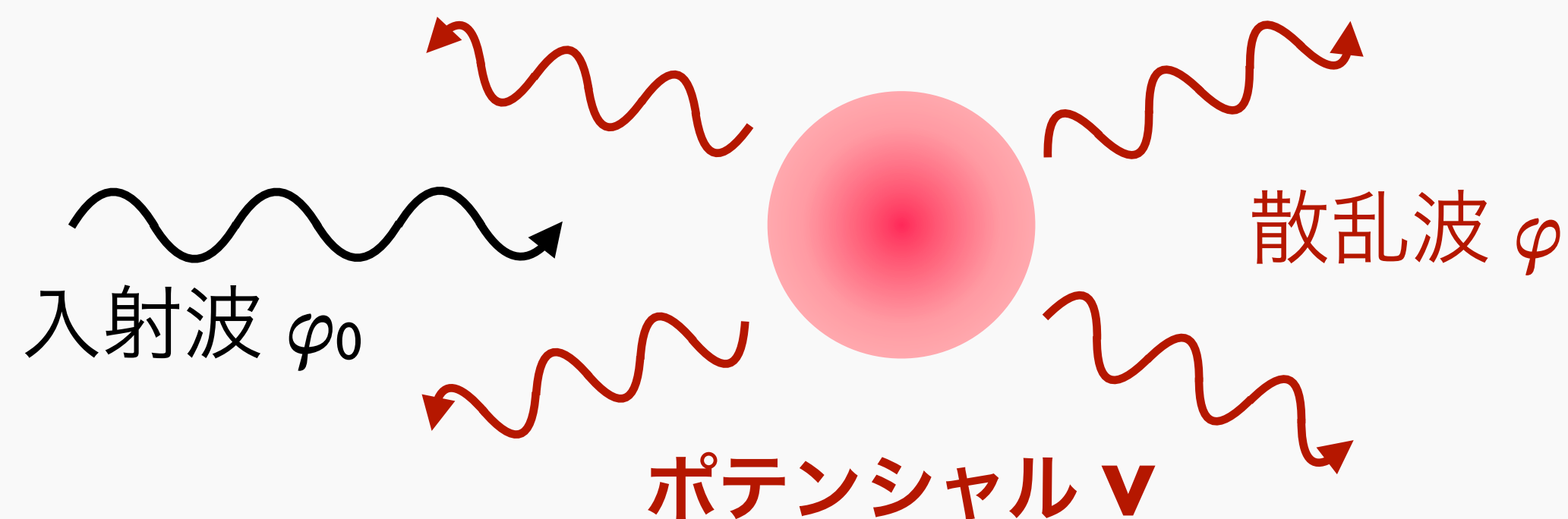
Mizuno & Suyama Phys. Rev. D **108**(2023)043511

Tambalo+ Phys Rev D **108**(2023)043527

Yarimoto & MO Phys. Rev. D **111** (2025)083541

Carrillo Gonzalez+ Phys. Rev. D. **113**(2026)024024

...



$$\varphi(\mathbf{r}) = \varphi_0(\mathbf{r}) - \frac{\mu}{2\pi\hbar^2} \int d\mathbf{r}' \frac{e^{ik \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} V(\mathbf{r}') \varphi(\mathbf{r}')$$

Born近似 ↓
 $\varphi_0(\mathbf{r})$



ボルン近似による波動光学効果の計算

- 重力ポテンシャルの最低次で

$$F(\omega) \simeq 1 + \int d\theta \kappa(\beta - \theta) G(\theta)$$

β : 光源位置

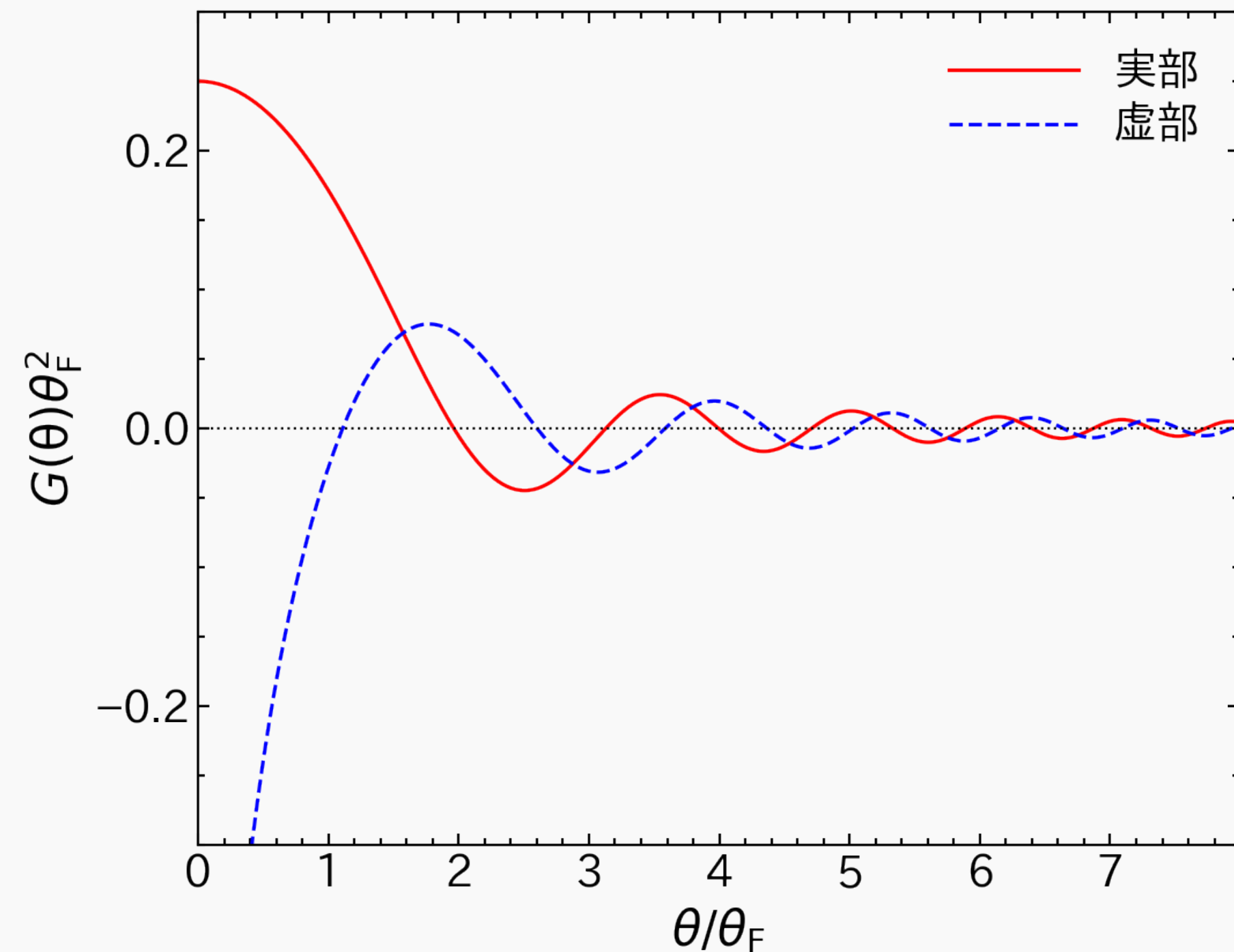
収束場 (視線方向に積分した質量分布) 畳み込みカーネル

$$G(\theta) = \frac{i}{2\pi\theta_F^2} \left\{ \text{Ci} \left(\frac{\theta^2}{2\theta_F^2} \right) + i \text{Si} \left(\frac{\theta^2}{2\theta_F^2} \right) - i \frac{\pi}{2} \right\}$$

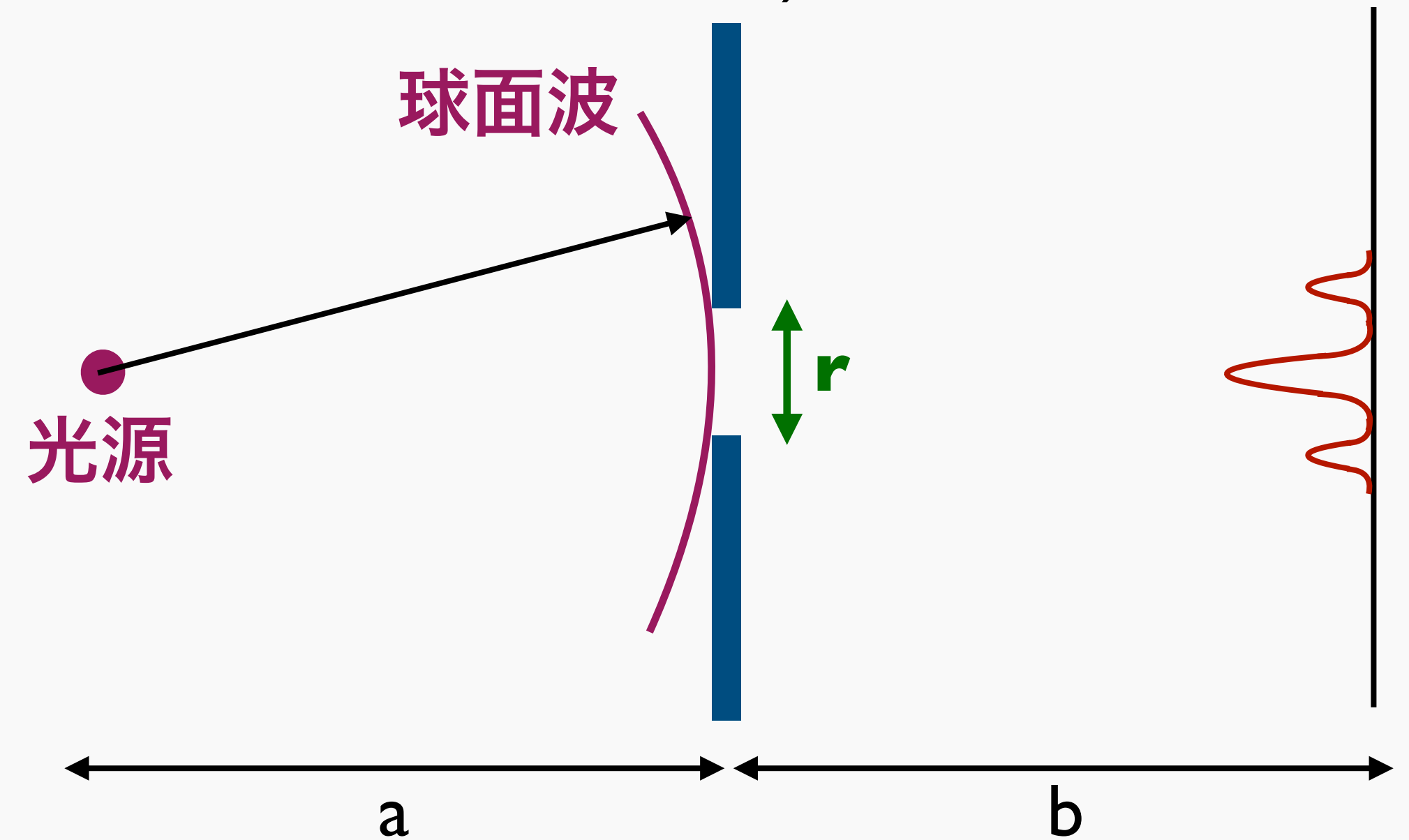
$$\theta_F = \sqrt{\frac{c}{\omega(1+z_1)} \frac{D_{ls}}{D_{ol}D_{os}}} \quad \text{フレネル長}$$



ボルン近似下の波動光学効果の物理的意味



(参考: フレネル回折)



カーネル関数 G の畳み込み
 = **フレネル長 θ_F での平滑化**
 (実効的な光源サイズ = フレネル長)

$$r \lesssim \sqrt{\frac{ab}{a+b}} \lambda \rightarrow \text{干渉縞}$$

フレネル長

波動光学効果で探る小スケールダークマター

- 重力波の振幅ゆらぎと位相ゆらぎの周波数進化から検出可
- ただし普通の重力波源に対しては信号は非常に小さい

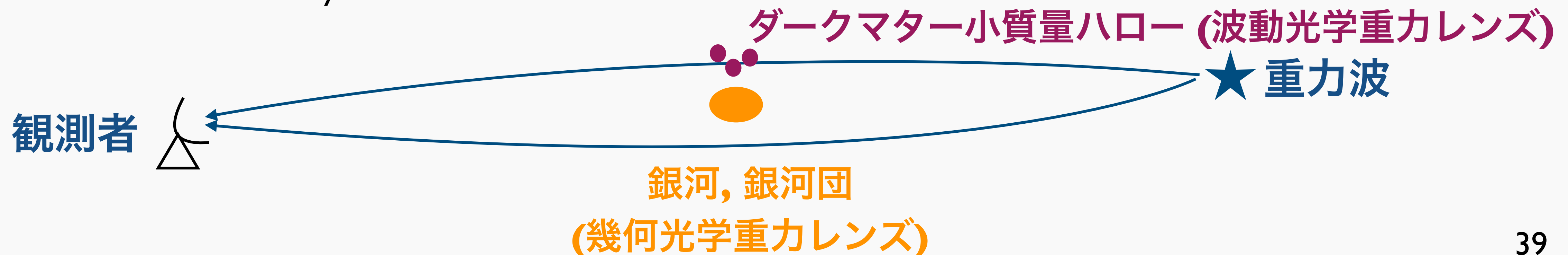
Takahashi ApJ **644**(2006)80

MO & Takahashi ApJ **901**(2020)58

- 銀河や銀河団の重力レンズで増光された像に対しては十分検出可能

MO & Takahashi Phys. Rev. D **106**(2022)043532

Nakazono & Suyama arXiv:2604.02216





波動光学効果による重力波波形のゆらぎ

- 増幅因子の一般的な解析的表式を導出

$$F^j(f, \mathbf{q}_\beta) \simeq |\mu_0(\mathbf{q}_j)|^{1/2} e^{2\pi i f \Delta t(\mathbf{q}_j + \mathbf{r}_j, \mathbf{q}_\beta)} e^{-i\pi n_j \text{sgn}(f)}$$

$$\times \left[1 + \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^2} \tilde{\kappa}_j(\mathbf{k}) \tilde{G}_j(\mathbf{k}, f) \right]$$

増幅因子の幾何光学
極限の表式

摂動的な波動光学効果

小スケール
ダークマター分布

$$\tilde{G}_j(\mathbf{k}, f) = \frac{i}{r_F^2 k^2 / 2} \left[\exp \left(-i \frac{\mu_{j,1} r_F^2}{2} k_1^2 - i \frac{\mu_{j,2} r_F^2}{2} k_2^2 \right) - 1 \right]$$

$r_F = f_K(\chi) \theta_F$
フレネル長

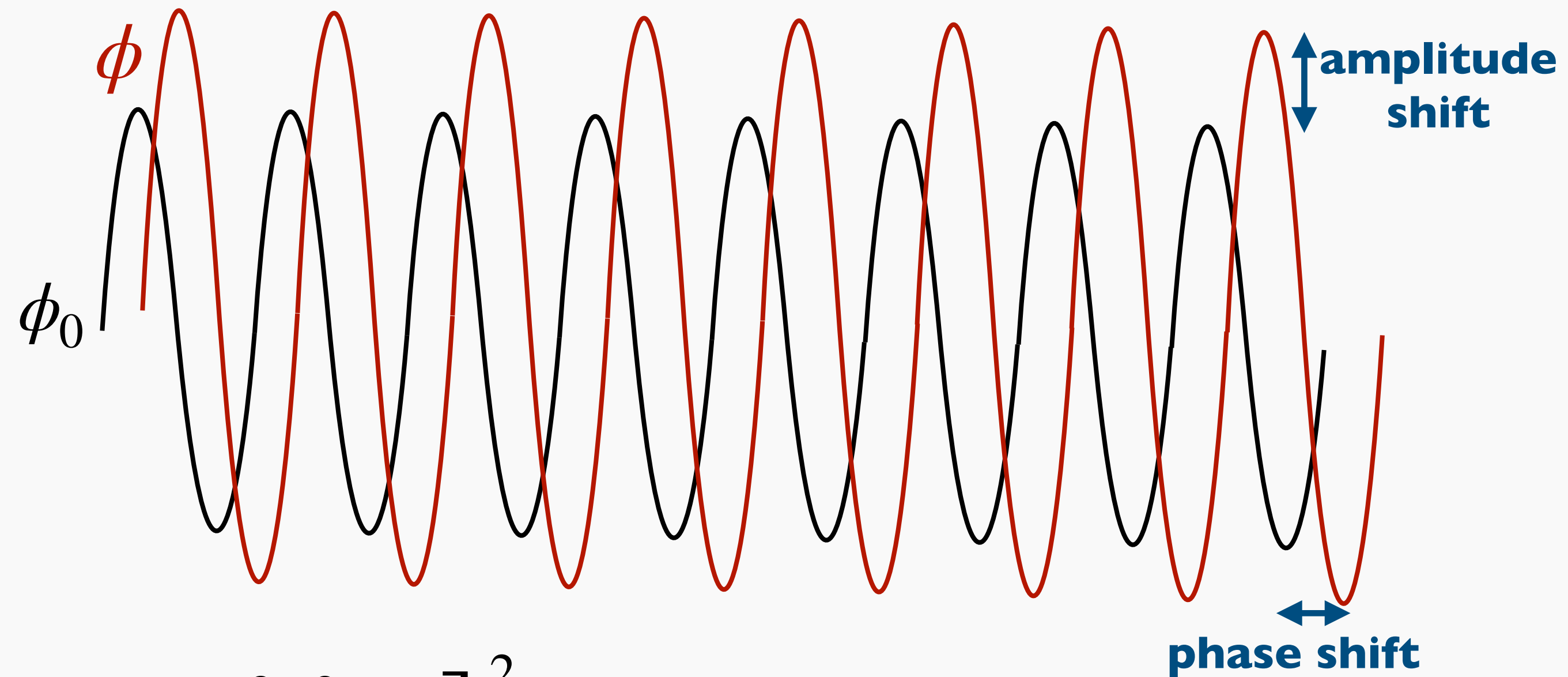
幾何光学重力レンズ増光率 $\mu_0 = \mu_{j,1} \mu_{j,2}$

振幅と位相のずれ

増幅因子 $F = \frac{\phi}{\phi_0} = (1 + K)e^{iS}$

振幅のずれ $K \simeq \text{Re}(F)$

位相のずれ $S \simeq \text{Im}(F)$



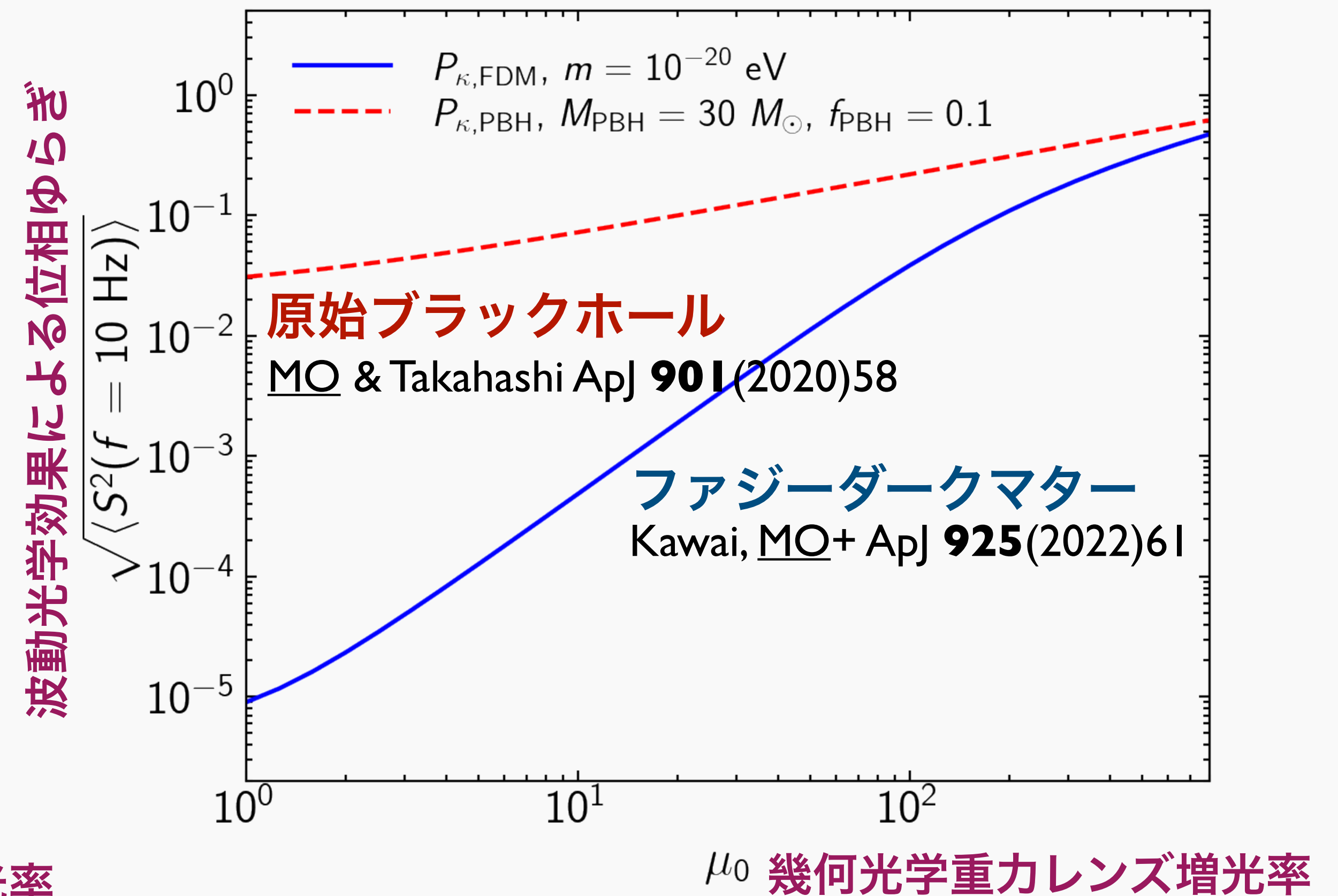
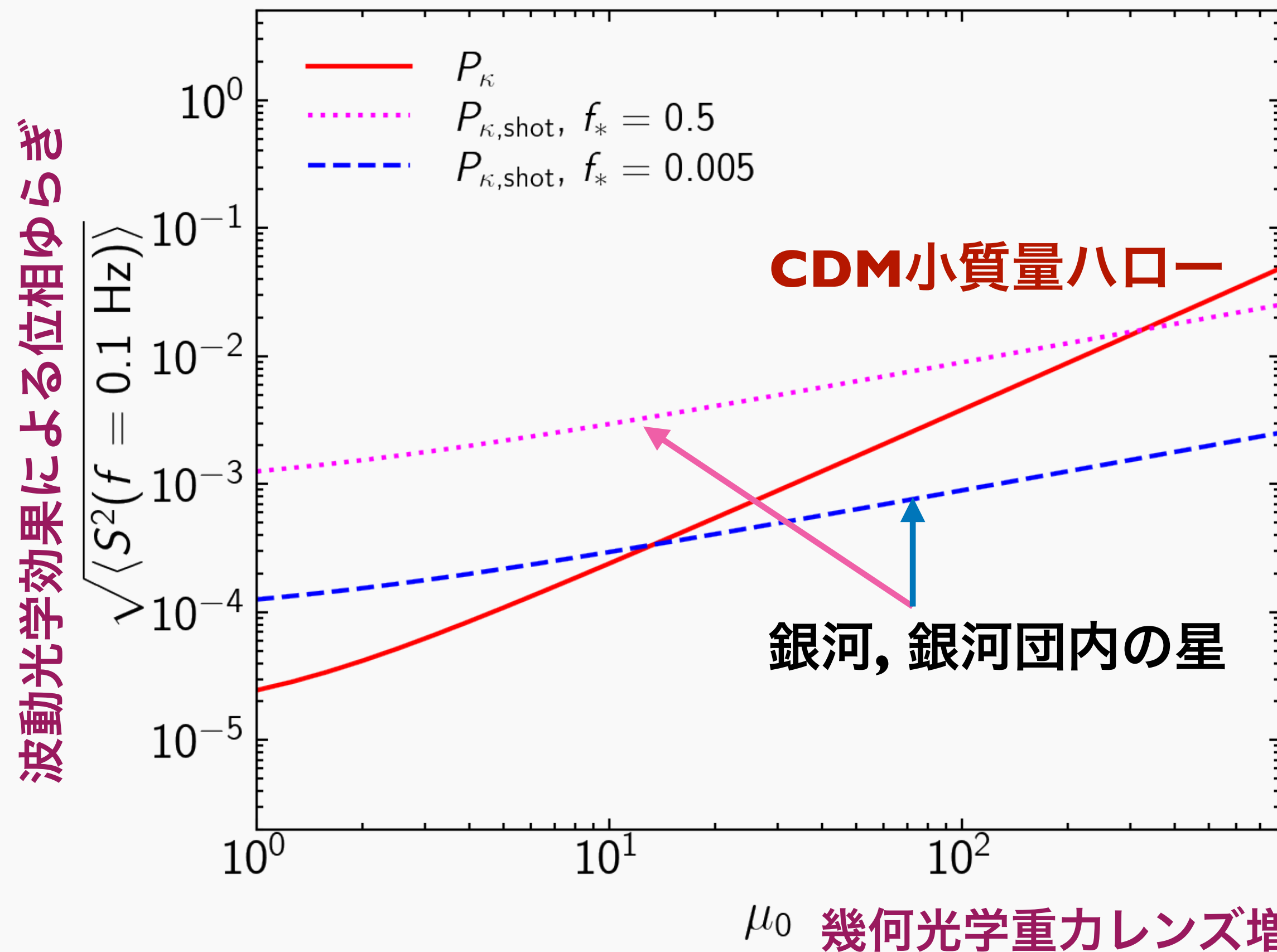
$$\langle K_j^2 \rangle = \int \frac{dk}{(2\pi)^2} P_k^j(k) \left[\frac{\sin(\mu_{j,1} r_F^2 k_1^2 / 2 + \mu_{j,2} r_F^2 k_2^2 / 2)}{r_F^2 k^2 / 2} \right]^2$$

$$\langle S_j^2 \rangle = \int \frac{dk}{(2\pi)^2} P_k^j(k) \left[\frac{\cos(\mu_{j,1} r_F^2 k_1^2 / 2 + \mu_{j,2} r_F^2 k_2^2 / 2) - 1}{r_F^2 k^2 / 2} \right]^2$$

収束場ゆらぎ局所
パワースペクトル
と結びつく

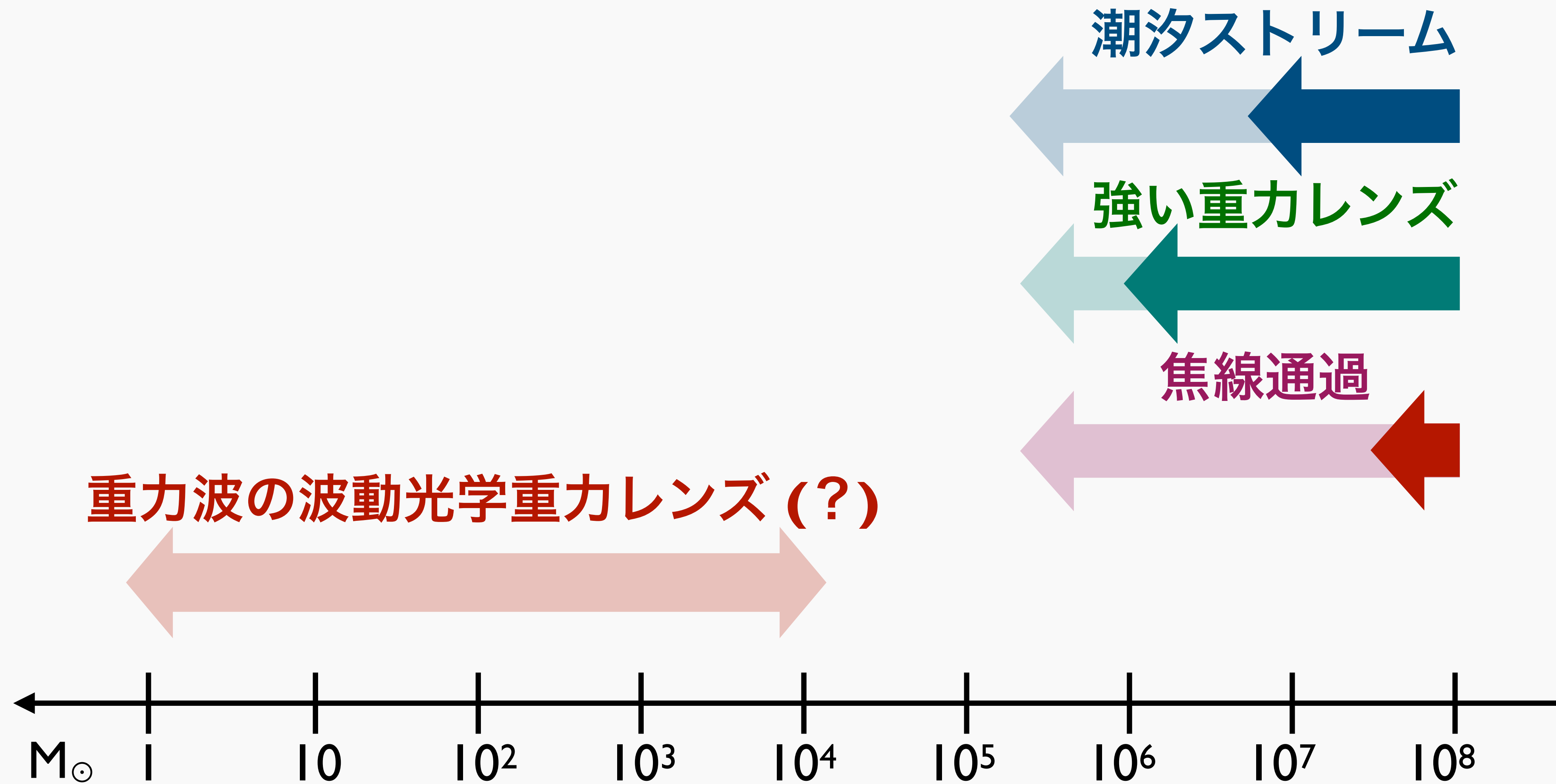


期待される波動光学効果の信号



幾何光学重力レンズ増光で波動光学効果の信号も大幅に増幅

小スケールダークマター分布の探求



まとめ

- 小スケールの諸問題でもパワースペクトルはいろいろと活用できる
- あまりやっている人がいないので, 楽しい